

Exploration et vieillissement de processus stochastiques non-markoviens

Julien Brémont - Encadrement : Raphaël Voituriez, Olivier Bénichou
03/07/2025

Sorbonne Université



Introduction

Pourquoi et comment utiliser l'aléatoire pour décrire des phénomènes physiques ?

Physique statistique et aléatoire (1/2)

- En physique statistique, on utilise des outils probabilistes pour modéliser des systèmes complexes soumis à des fluctuations.

Physique statistique et aléatoire (1/2)

- En physique statistique, on utilise des outils probabilistes pour modéliser des systèmes complexes soumis à des fluctuations.
- Ces fluctuations peuvent être d'origine déterministe, mais trop complexes pour être décrites précisément.

Physique statistique et aléatoire (1/2)

- En physique statistique, on utilise des outils probabilistes pour modéliser des systèmes complexes soumis à des fluctuations.
- Ces fluctuations peuvent être d'origine déterministe, mais trop complexes pour être décrites précisément.
- Exemple classique : le lancer d'un dé obéit aux lois déterministes de la mécanique, mais la face obtenue est imprévisible en pratique—on modélise cela par de l'aléatoire.

Physique statistique et aléatoire (1/2)

- En physique statistique, on utilise des outils probabilistes pour modéliser des systèmes complexes soumis à des fluctuations.
- Ces fluctuations peuvent être d'origine déterministe, mais trop complexes pour être décrites précisément.
- Exemple classique : le lancer d'un dé obéit aux lois déterministes de la mécanique, mais la face obtenue est imprévisible en pratique—on modélise cela par de l'aléatoire.
- De la même façon, une particule, une cellule, un animal... peut avoir un comportement aléatoire.

Physique statistique et aléatoire (1/2)

- En physique statistique, on utilise des outils probabilistes pour modéliser des systèmes complexes soumis à des fluctuations.
- Ces fluctuations peuvent être d'origine déterministe, mais trop complexes pour être décrites précisément.
- Exemple classique : le lancer d'un dé obéit aux lois déterministes de la mécanique, mais la face obtenue est imprévisible en pratique—on modélise cela par de l'aléatoire.
- De la même façon, une particule, une cellule, un animal... peut avoir un comportement aléatoire.
- Sa trajectoire devient alors une **réalisation d'un processus stochastique**.

Physique statistique et aléatoire (2/2)

- Exemples de systèmes physiques modélisés par des processus stochastiques :

Physique statistique et aléatoire (2/2)

- Exemples de systèmes physiques modélisés par des processus stochastiques :
 - Mouvement brownien d'un grain de pollen ($\approx 5\mu\text{m}$) à la surface de l'eau — observé par Brown (1827), modélisé par Einstein (1905)

Physique statistique et aléatoire (2/2)

- Exemples de systèmes physiques modélisés par des processus stochastiques :
 - Mouvement brownien d'un grain de pollen ($\approx 5\mu\text{m}$) à la surface de l'eau — observé par Brown (1827), modélisé par Einstein (1905)
 - Une cellule immunitaire ($\approx 7\mu\text{m}$) explorant un tissu à la recherche d'un pathogène

Physique statistique et aléatoire (2/2)

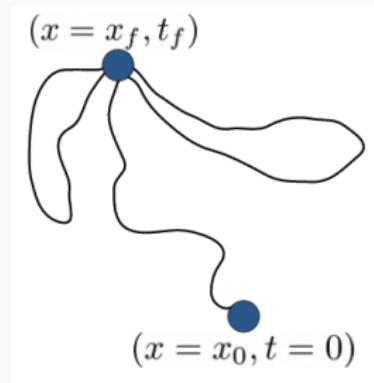
- Exemples de systèmes physiques modélisés par des processus stochastiques :
 - Mouvement brownien d'un grain de pollen ($\approx 5\mu\text{m}$) à la surface de l'eau — observé par Brown (1827), modélisé par Einstein (1905)
 - Une cellule immunitaire ($\approx 7\mu\text{m}$) explorant un tissu à la recherche d'un pathogène
 - Une fourmi ($\approx 1\text{cm}$) cherchant son nid via les phéromones laissées par ses congénères...

Physique statistique et aléatoire (2/2)

- Exemples de systèmes physiques modélisés par des processus stochastiques :
 - Mouvement brownien d'un grain de pollen ($\approx 5\mu\text{m}$) à la surface de l'eau — observé par Brown (1827), modélisé par Einstein (1905)
 - Une cellule immunitaire ($\approx 7\mu\text{m}$) explorant un tissu à la recherche d'un pathogène
 - Une fourmi ($\approx 1\text{cm}$) cherchant son nid via les phéromones laissées par ses congénères...
- Dans cette thèse, on s'intéresse à la manière dont ces processus **explorent l'espace** : efficacité à localiser des cibles, probabilité d'en atteindre une avant une autre, etc.

Observables statistiques liées à l'exploration

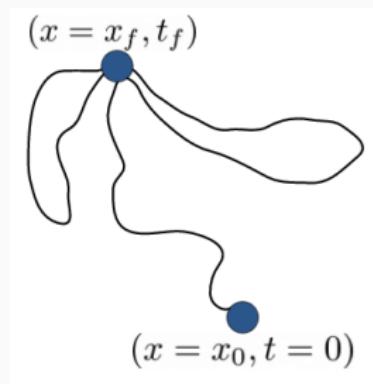
L'**exploration de l'espace** par un marcheur aléatoire est caractérisée par plusieurs observables **paradigmatiques** :



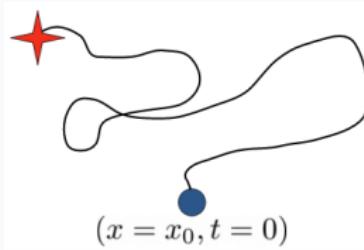
(a) Propagateur P

Observables statistiques liées à l'exploration

L'exploration de l'espace par un marcheur aléatoire est caractérisée par plusieurs observables **paradigmatiques** :



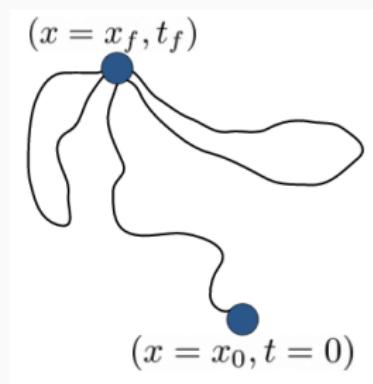
(a) Propagateur P



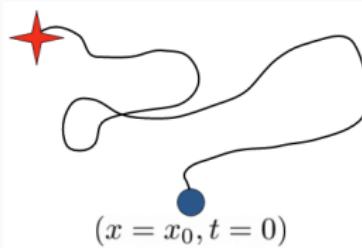
(b) Premier passage F
('temps pour trouver une cible')

Observables statistiques liées à l'exploration

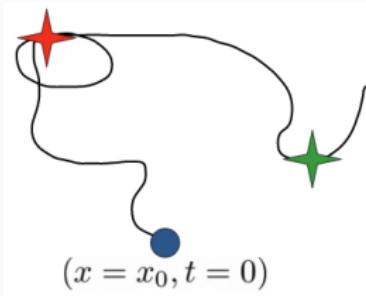
L'**exploration de l'espace** par un marcheur aléatoire est caractérisée par plusieurs observables **paradigmatiques** :



(a) Propagateur P



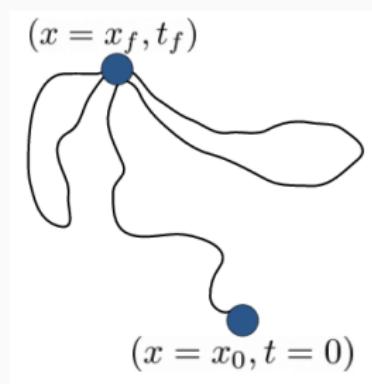
(b) Premier passage F
('temps pour trouver une
cible')



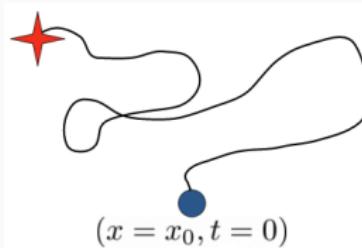
(c) Splitting π
('compétition entre deux
cibles')

Observables statistiques liées à l'exploration

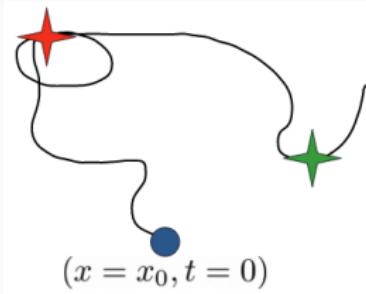
L'exploration de l'espace par un marcheur aléatoire est caractérisée par plusieurs observables **paradigmatiques** :



(a) Propagateur P



(b) Premier passage F
('temps pour trouver une cible')



(c) Splitting π
('compétition entre deux cibles')

Ces observables **fondamentales** font l'objet de nombreuses études
[Redner, Schehr, Bénichou, Voituriez, Majumdar...]

Contexte : marches aléatoires et mémoire (1/2)

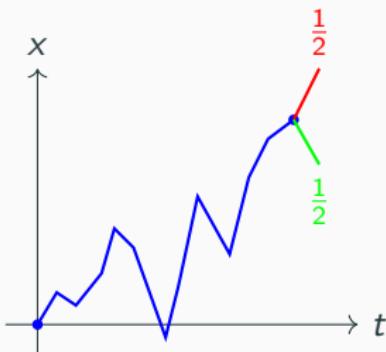
- La marche aléatoire simple et son analogue continu le mouvement brownien sont des modèles classiques en physique statistique.

Contexte : marches aléatoires et mémoire (1/2)

- La marche aléatoire simple et son analogue continu le mouvement brownien sont des modèles classiques en physique statistique.
- Leur dynamique, bien qu'aléatoire, est **sans mémoire**, car l'état futur ne dépend que de l'état présent: elle est dite **markovienne**.

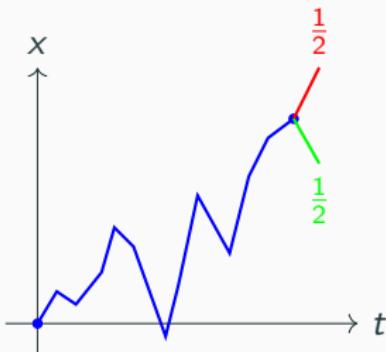
Contexte : marches aléatoires et mémoire (1/2)

- La marche aléatoire simple et son analogue continu le mouvement brownien sont des modèles classiques en physique statistique.
- Leur dynamique, bien qu'aléatoire, est **sans mémoire**, car l'état futur ne dépend que de l'état présent: elle est dite **markovienne**.



Contexte : marches aléatoires et mémoire (1/2)

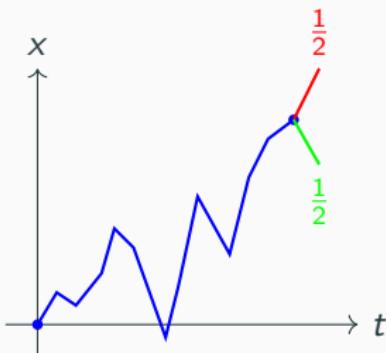
- La marche aléatoire simple et son analogue continu le mouvement brownien sont des modèles classiques en physique statistique.
- Leur dynamique, bien qu'aléatoire, est **sans mémoire**, car l'état futur ne dépend que de l'état présent: elle est dite **markovienne**.



- Ces modèles décrivent de nombreux phénomènes physiques classiques (diffusion thermique, réactions chimiques...).

Contexte : marches aléatoires et mémoire (1/2)

- La marche aléatoire simple et son analogue continu le mouvement brownien sont des modèles classiques en physique statistique.
- Leur dynamique, bien qu'aléatoire, est **sans mémoire**, car l'état futur ne dépend que de l'état présent: elle est dite **markovienne**.



- Ces modèles décrivent de nombreux phénomènes physiques classiques (diffusion thermique, réactions chimiques...).
- Leur caractère markovien permet un calcul des observables P, F, π .

Contexte : marches aléatoires et mémoire (2/2)

- La plupart des systèmes réels **violent la propriété de Markov** : l'état futur dépend de la trajectoire passée.

Contexte : marches aléatoires et mémoire (2/2)

- La plupart des systèmes réels **violent la propriété de Markov** : l'état futur dépend de la trajectoire passée.
- Ces processus sont dits **non-markoviens**, et impliquent des **effets de mémoire à long terme**.

Contexte : marches aléatoires et mémoire (2/2)

- La plupart des systèmes réels **violent la propriété de Markov** : l'état futur dépend de la trajectoire passée.
- Ces processus sont dits **non-markoviens**, et impliquent des **effets de mémoire à long terme**.

Exemples concrets :

- Fourmis, cellules modifiant leur environnement local (traces de phéromones, modification de la matrice extracellulaire...)

Contexte : marches aléatoires et mémoire (2/2)

- La plupart des systèmes réels **violent la propriété de Markov** : l'état futur dépend de la trajectoire passée.
- Ces processus sont dits **non-markoviens**, et impliquent des **effets de mémoire à long terme**.

Exemples concrets :

- Fourmis, cellules modifiant leur environnement local (traces de phéromones, modification de la matrice extracellulaire...)
- Corrélations à longue portée dans les marchés financiers...

Que signifie “non-markovien” ? (1/2)

- Contrairement aux processus markoviens, l'évolution d'un processus **non-markovien** ne dépend pas seulement de l'état présent, mais de la **trajectoire passée entière**.

Que signifie “non-markovien” ? (1/2)

- Contrairement aux processus markoviens, l'évolution d'un processus **non-markovien** ne dépend pas seulement de l'état présent, mais de la **trajectoire passée entière**.
- Cette mémoire émerge souvent de l'évolution **stochastique** de degrés de liberté **cachés**, internes (ex. réactions biochimiques) ou externes (couplage avec l'environnement).

Que signifie “non-markovien” ? (1/2)

- Contrairement aux processus markoviens, l'évolution d'un processus **non-markovien** ne dépend pas seulement de l'état présent, mais de la **trajectoire passée entière**.
- Cette mémoire émerge souvent de l'évolution **stochastique** de degrés de liberté **cachés**, internes (ex. réactions biochimiques) ou externes (couplage avec l'environnement).
- Il n'existe pas, à ce jour, de cadre analytique général pour traiter ces processus — pourtant **omniprésents** dans les systèmes réels.

Que signifie “non-markovien” ? (1/2)

- Contrairement aux processus markoviens, l'évolution d'un processus **non-markovien** ne dépend pas seulement de l'état présent, mais de la **trajectoire passée entière**.
- Cette mémoire émerge souvent de l'évolution **stochastique** de degrés de liberté **cachés**, internes (ex. réactions biochimiques) ou externes (couplage avec l'environnement).
- Il n'existe pas, à ce jour, de cadre analytique général pour traiter ces processus — pourtant **omniprésents** dans les systèmes réels.
- Le calcul des observables classiques P, F, π constitue alors un **vrai défi**.

Que signifie “non-markovien” ? (2/2)

Conséquences typiques :

- **Vieillissement** : les observables dépendent de l'âge du système

Que signifie “non-markovien” ? (2/2)

Conséquences typiques :

- **Vieillissement** : les observables dépendent de l'âge du système
- **Diffusion anormale** : $\langle x^2(t) \rangle \sim t^\mu$ avec $\mu \neq 1$

Que signifie “non-markovien” ? (2/2)

Conséquences typiques :

- **Vieillissement** : les observables dépendent de l'âge du système
- **Diffusion anormale** : $\langle x^2(t) \rangle \sim t^\mu$ avec $\mu \neq 1$
- **Propagateurs non gaussiens** \Rightarrow échec du théorème central limite
 \Rightarrow fortes corrélations dans les incrément

Que signifie “non-markovien” ? (2/2)

Conséquences typiques :

- **Vieillissement** : les observables dépendent de l'âge du système
- **Diffusion anormale** : $\langle x^2(t) \rangle \sim t^\mu$ avec $\mu \neq 1$
- **Propagateurs non gaussiens** \Rightarrow échec du théorème central limite
 \Rightarrow fortes corrélations dans les incrément
- **Multiscaling, piégeage, transitions dynamiques...**

Que signifie “non-markovien” ? (2/2)

Conséquences typiques :

- **Vieillissement** : les observables dépendent de l'âge du système
- **Diffusion anormale** : $\langle x^2(t) \rangle \sim t^\mu$ avec $\mu \neq 1$
- **Propagateurs non gaussiens** \Rightarrow échec du théorème central limite
 \Rightarrow fortes corrélations dans les incrément
- **Multiscaling, piégeage, transitions dynamiques...**

Objectif : À partir de modèles simples et d'observables bien choisies, on veut **comprendre les effets de la mémoire sur l'exploration**.

Stratégie de la thèse (1/2)

- Étudier analytiquement des **modèles minimaux** non-markoviens issus de la littérature, construits à partir de mécanismes **simples et physiquement pertinents** :

Stratégie de la thèse (1/2)

- Étudier analytiquement des **modèles minimaux** non-markoviens issus de la littérature, construits à partir de mécanismes **simples et physiquement pertinents** :
 - Mémoire spatiale locale
 - Auto-interaction
 - Corrélations temporelles dans les incrémentations.

Stratégie de la thèse (1/2)

- Étudier analytiquement des **modèles minimaux** non-markoviens issus de la littérature, construits à partir de mécanismes **simples et physiquement pertinents** :
 - Mémoire spatiale locale
 - Auto-interaction
 - Corrélations temporelles dans les incrément.
- Quantifier l'effet de la mémoire sur l'exploration de ces processus.

Stratégie de la thèse (1/2)

- Étudier analytiquement des **modèles minimaux** non-markoviens issus de la littérature, construits à partir de mécanismes **simples et physiquement pertinents** :
 - Mémoire spatiale locale
 - Auto-interaction
 - Corrélations temporelles dans les incrément.
- Quantifier l'effet de la mémoire sur l'exploration de ces processus.
- Mettre en lumière des structures communes dans la diversité des dynamiques non-markoviennes.

Stratégie de la thèse (2/2)

Trois axes d'étude :

1. **Marches activées localement** — la dynamique du marcheur dépend du temps passé dans certaines régions de l'espace.

Stratégie de la thèse (2/2)

Trois axes d'étude :

1. **Marches activées localement** — la dynamique du marcheur dépend du temps passé dans certaines régions de l'espace.
2. **Marches auto-interagissantes** — le marcheur laisse derrière lui des empreintes qui modifient sa trajectoire future (effet “Petit Poucet”).

Stratégie de la thèse (2/2)

Trois axes d'étude :

1. **Marches activées localement** — la dynamique du marcheur dépend du temps passé dans certaines régions de l'espace.
2. **Marches auto-interagissantes** — le marcheur laisse derrière lui des empreintes qui modifient sa trajectoire future (effet "Petit Poucet").
3. **Identification d'observables universelles** pour quantifier exploration et vieillissement.

Marches activées localement

*Quel est l'impact d'une perturbation localisée sur
l'exploration ?*

Illustration et motivation

Q : Comment analyser la statistique d'un processus dont la dynamique dépend du passé, à travers le nombre de passages dans certaines régions de l'espace ?

Illustration et motivation

Q : Comment analyser la statistique d'un processus dont la dynamique dépend du passé, à travers le nombre de passages dans certaines régions de l'espace ?



Illustration et motivation

Q : Comment analyser la statistique d'un processus dont la dynamique dépend du passé, à travers le nombre de passages dans certaines régions de l'espace ?



Défi : Le processus $x(t)$ n'est **pas markovien** : la dynamique dépend de l'histoire, **et réciproquement**.

La LARW : une marche à mémoire locale

- La LARW est une marche aléatoire $x(t)$ en temps continu sur \mathbb{Z}^d .

La LARW : une marche à mémoire locale

- La LARW est une marche aléatoire $x(t)$ en temps continu sur \mathbb{Z}^d .
- L'origine est un **point chaud** : un site où le marcheur est *activé*.

La LARW : une marche à mémoire locale

- La LARW est une marche aléatoire $x(t)$ en temps continu sur \mathbb{Z}^d .
- L'origine est un **point chaud** : un site où le marcheur est *activé*.
- L'**activation** a du marcheur est le **temps passé sur le point chaud**:

$$a(t) = \int_0^t \delta(x(t')) dt'.$$

La LARW : une marche à mémoire locale

- La LARW est une marche aléatoire $x(t)$ en temps continu sur \mathbb{Z}^d .
- L'origine est un **point chaud** : un site où le marcheur est *activé*.
- L'**activation** a du marcheur est le **temps passé sur le point chaud**:

$$a(t) = \int_0^t \delta(x(t')) dt'.$$

- Le **taux de saut** (vitesse) $\tau(a)^{-1}$ **dépend de l'activation**.

La LARW : une marche à mémoire locale

- La LARW est une marche aléatoire $x(t)$ en temps continu sur \mathbb{Z}^d .
- L'origine est un **point chaud** : un site où le marcheur est *activé*.
- L'**activation** a du marcheur est le **temps passé sur le point chaud**:

$$a(t) = \int_0^t \delta(x(t')) dt'.$$

- Le **taux de saut** (vitesse) $\tau(a)^{-1}$ **dépend de l'activation**. Si $\tau(a)$ croît, la LARW décélère à chaque passage au point chaud; si $\tau(a)$ décroît, elle accélère.

Contexte et état de l'art

- Modèle introduit par [Bénichou et al] pour une marche **unidimensionnelle en espace continu.**

Contexte et état de l'art

- Modèle introduit par [Bénichou et al] pour une marche **unidimensionnelle en espace continu**.
- Inspiré du comportement de certaines cellules immunitaires (cellules dendritiques), dont la dynamique évolue après des contacts prolongés avec des contraintes mécaniques locales [Moreau et al].

Contexte et état de l'art

- Modèle introduit par [Bénichou et al] pour une marche **unidimensionnelle en espace continu**.
- Inspiré du comportement de certaines cellules immunitaires (cellules dendritiques), dont la dynamique évolue après des contacts prolongés avec des contraintes mécaniques locales [Moreau et al].
- S'inscrit dans la famille des modèles **non-markoviens fondamentaux** où la trajectoire passée influence la dynamique future : marche auto-interagissante [Tóth,Dumaz,Amit,Peliti,Parisi,Barbier–Chebbah], de l'éléphant [Schütz,Bertoin], ou du singe [Boyer].

Contexte et état de l'art

- Modèle introduit par [Bénichou et al] pour une marche **unidimensionnelle en espace continu**.
- Inspiré du comportement de certaines cellules immunitaires (cellules dendritiques), dont la dynamique évolue après des contacts prolongés avec des contraintes mécaniques locales [Moreau et al].
- S'inscrit dans la famille des modèles **non-markoviens fondamentaux** où la trajectoire passée influence la dynamique future : marche auto-interagissante [Tóth,Dumaz,Amit,Peliti,Parisi,Barbier–Chebbah], de l'éléphant [Schütz,Bertoin], ou du singe [Boyer].
- Le **propagateur** P de la LARW n'est connu qu'en $d = 1$ et en espace continu. Que dire de P en dimension d quelconque ?

Objectif de l'étude

- Comment la mémoire locale caractéristique des LARWs affecte-t-elle l'exploration de l'espace ?

Objectif de l'étude

- Comment la mémoire locale caractéristique des LARWs affecte-t-elle l'exploration de l'espace ?
- Pour y répondre, on calcule le **propagateur** $P(x, t)$.

Objectif de l'étude

- Comment la mémoire locale caractéristique des LARWs affecte-t-elle l'exploration de l'espace ?
- Pour y répondre, on calcule le **propagateur** $P(x, t)$.
- Notre approche permet en réalité d'obtenir la **distribution jointe** $P(x, a, t)$.

Principe de la méthode

Le problème semble complexe : la dynamique à l'instant t dépend de **l'ensemble des retours au point chaud** survenus pour $t' < t$, qui eux-mêmes dépendent de la dynamique...

Principe de la méthode

Le problème semble complexe : la dynamique à l'instant t dépend de **l'ensemble des retours au point chaud** survenus pour $t' < t$, qui eux-mêmes dépendent de la dynamique...

Idée centrale : entre deux retours successifs au point chaud, l'activation a reste constante, et la trajectoire est donc **markovienne**.

Principe de la méthode

Le problème semble complexe : la dynamique à l'instant t dépend de **l'ensemble des retours au point chaud** survenus pour $t' < t$, qui eux-mêmes dépendent de la dynamique...

Idée centrale : entre deux retours successifs au point chaud, l'activation a reste constante, et la trajectoire est donc **markovienne**.

$$\mathbb{P}(a + da, t + dt, x = 0) = \text{Rester sur le point chaud pendant } dt \quad + \int_0^t dt' \quad \text{Sauter au temps } t' \\ \mathbb{P}(a + da, t + dt, x = 0) = \dots \quad \text{Revenir au temps } t$$

The diagram illustrates the principle of the method. It shows a trajectory starting at time t with state a . A red circle with a blue center represents the 'hot point'. Above the trajectory, the text 'Rester sur le point chaud pendant dt ' is written next to the circle. Below the trajectory, the text ' t, a ' is written. To the right, there is an integral symbol with limits from 0 to t , and below it is the text ' dt' '. Further to the right, another red circle with a blue center is shown at time t' with state $a + da$. Above this circle, the text 'Sauter au temps t' is written with an arrow pointing to it. Below the circle, the text 'Revenir au temps t ' is written with an arrow pointing back to the original position. Ellipses '...' are placed between the two main stages of the trajectory.

Obtention de $P(0, a, t)$

L'approche précédente conduit à l'équation fondamentale :

$$\partial_t P(0, a, t) + \partial_a P(0, a, t) = -\frac{P(0, a, t)}{\tau(a)} + \int_0^t \frac{dt'}{\tau(a)} P(0, a, t') F_a(0|0, t-t').$$

Obtention de $P(0, a, t)$

L'approche précédente conduit à l'équation fondamentale :

$$\partial_t P(0, a, t) + \partial_a P(0, a, t) = -\frac{P(0, a, t)}{\tau(a)} + \int_0^t \frac{dt'}{\tau(a)} P(0, a, t') F_a(0|0, t-t').$$

Pour résoudre cette équation, on introduit la transformée de Laplace temporelle :

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Obtention de $P(0, a, t)$

L'approche précédente conduit à l'équation fondamentale :

$$\partial_t P(0, a, t) + \partial_a P(0, a, t) = -\frac{P(0, a, t)}{\tau(a)} + \int_0^t \frac{dt'}{\tau(a)} P(0, a, t') F_a(0|0, t-t').$$

Pour résoudre cette équation, on introduit la transformée de Laplace temporelle :

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

La transformée de Laplace de la loi du temps d'attente est:

$$\xi_a(s) = \frac{1}{1 + s\tau(a)}.$$

Détermination de $\hat{P}(0, a, s)$

On obtient une expression explicite pour $\hat{P}(0, a, s)$:

$$\hat{P}(0, a, s) = \exp \left(- \int_0^a \frac{db}{\xi_b \tau(b) P_d(0|0, \xi_b)} \right).$$

où $P_d(x|y, \xi)$ est la fonction génératrice de la marche non-activée (**nue**).

On peut en déduire la loi jointe **exacte**:

$$\hat{P}(x, a, s) = \frac{P_d(x|0, \xi_a)}{P_d(0|0, \xi_a)} \exp \left(- \int_0^a \frac{db}{\tau(b) \xi_b P_d(0|0, \xi_b)} \right).$$

Détermination de $\hat{P}(0, a, s)$

On obtient une expression explicite pour $\hat{P}(0, a, s)$:

$$\hat{P}(0, a, s) = \exp \left(- \int_0^a \frac{db}{\xi_b \tau(b) P_d(0|0, \xi_b)} \right).$$

où $P_d(x|y, \xi)$ est la fonction génératrice de la marche non-activée (**nue**).

On peut en déduire la loi jointe **exacte**:

$$\hat{P}(x, a, s) = \frac{P_d(x|0, \xi_a)}{P_d(0|0, \xi_a)} \exp \left(- \int_0^a \frac{db}{\tau(b) \xi_b P_d(0|0, \xi_b)} \right).$$

Cette expression est **inédite** : la loi **jointe** de la position x et du temps a passé en 0 n'est, à notre connaissance, **pas connue même pour des marches markoviennes non-activées**.

Détermination de $\hat{P}(0, a, s)$

On obtient une expression explicite pour $\hat{P}(0, a, s)$:

$$\hat{P}(0, a, s) = \exp \left(- \int_0^a \frac{db}{\xi_b \tau(b) P_d(0|0, \xi_b)} \right).$$

où $P_d(x|y, \xi)$ est la fonction génératrice de la marche non-activée (**nue**).

On peut en déduire la loi jointe **exacte**:

$$\hat{P}(x, a, s) = \frac{P_d(x|0, \xi_a)}{P_d(0|0, \xi_a)} \exp \left(- \int_0^a \frac{db}{\tau(b) \xi_b P_d(0|0, \xi_b)} \right).$$

Cette expression est **inédite** : la loi **jointe** de la position x et du temps a passé en 0 n'est, à notre connaissance, **pas connue même pour des marches markoviennes non-activées**.

Pour expliciter les calculs, on adopte ensuite la **marche aléatoire simple** comme marche nue, mais le résultat reste valable pour **tout type de marche, sur tout type de graphe**.

Conséquences selon la dimension de l'espace

- $d = 1, 2$: **récurrence** \Rightarrow retours fréquents au point chaud
 \Rightarrow le marcheur est **repoussé** du point chaud en cas d'accélération,
attiré en cas de décélération.

Conséquences selon la dimension de l'espace

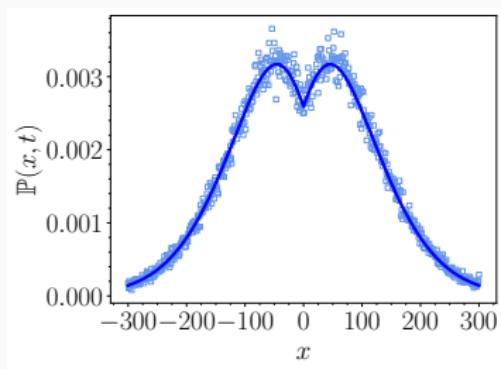
- $d = 1, 2$: **récurrence** \Rightarrow retours fréquents au point chaud
 \Rightarrow le marcheur est **repoussé** du point chaud en cas d'accélération,
attiré en cas de décélération.
- $d \geq 3$: **transience** \Rightarrow le point chaud n'est visité qu'un nombre *fini* de fois \Rightarrow les effets de mémoire sont plus subtils.

Conséquences selon la dimension de l'espace

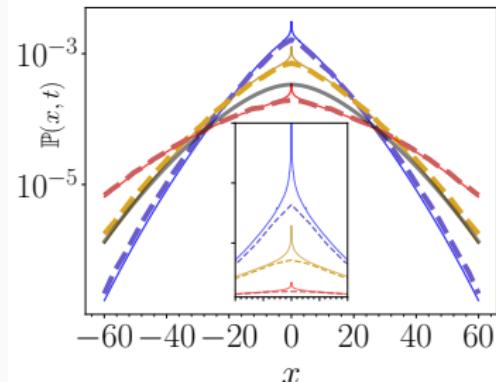
- $d = 1, 2$: **récurrence** \Rightarrow retours fréquents au point chaud
 \Rightarrow le marcheur est **repoussé** du point chaud en cas d'accélération,
attiré en cas de décélération.
- $d \geq 3$: **transience** \Rightarrow le point chaud n'est visité qu'un nombre *fini* de fois \Rightarrow les effets de mémoire sont plus subtils.
- Pour tout d : P reste **non-gaussien** \Rightarrow les incrémentations sont fortement corrélées, **même sous l'effet d'une perturbation locale**.

Conséquences selon la dimension de l'espace

- $d = 1, 2$: **récurrence** \Rightarrow retours fréquents au point chaud
 \Rightarrow le marcheur est **repoussé** du point chaud en cas d'accélération,
attiré en cas de décélération.
- $d \geq 3$: **transience** \Rightarrow le point chaud n'est visité qu'un nombre *fini* de fois \Rightarrow les effets de mémoire sont plus subtils.
- Pour tout d : P reste **non-gaussien** \Rightarrow les incrémentents sont fortement corrélés, **même sous l'effet d'une perturbation locale**.



$d = 1$, accéléré



$d = 2$, décéléré

Extension à plusieurs points chauds

Que se passe-t-il si on ajoute plusieurs points chauds ?

- Si les points chauds forment un **réseau périodique** : l'activation devient **déterministe** à long temps, $a(t) \sim \frac{t}{L^d}$ (argument ergodique).

Extension à plusieurs points chauds

Que se passe-t-il si on ajoute plusieurs points chauds ?

- Si les points chauds forment un **réseau périodique** : l'activation devient **déterministe** à long temps, $a(t) \sim \frac{t}{L^d}$ (argument ergodique).
- La statistique devient asymptotiquement **gaussienne**.

Extension à plusieurs points chauds

Que se passe-t-il si on ajoute plusieurs points chauds ?

- Si les points chauds forment un **réseau périodique** : l'activation devient **déterministe** à long temps, $a(t) \sim \frac{t}{L^d}$ (argument ergodique).
- La statistique devient asymptotiquement **gaussienne**.
- Idem si les points chauds sont distribués avec une densité $\rho > 0$.

Mémoire relaxée

Modèle relaxant : les points chauds sont toujours distribués **périodiquement** (période L), mais l'activation **décroît** selon un taux γ :

$$\frac{da}{dt} = 1_{\text{hot}}(x(t)) - \gamma a(t). \quad (1)$$

Mémoire relaxée

Modèle relaxant : les points chauds sont toujours distribués **périodiquement** (période L), mais l'activation **décroît** selon un taux γ :

$$\frac{da}{dt} = 1_{\text{hot}}(x(t)) - \gamma a(t). \quad (1)$$

- Modèle **physiquement réaliste** : l'activation ne peut pas croître indéfiniment.

Mémoire relaxée

Modèle relaxant : les points chauds sont toujours distribués **périodiquement** (période L), mais l'activation **décroît** selon un taux γ :

$$\frac{da}{dt} = 1_{\text{hot}}(x(t)) - \gamma a(t). \quad (1)$$

- Modèle **physiquement réaliste** : l'activation ne peut pas croître indéfiniment.
- Ce mécanisme induit une **transition dynamique** entre phase gaussienne et non-gaussienne.

Mémoire relaxée

Modèle relaxant : les points chauds sont toujours distribués **périodiquement** (période L), mais l'activation **décroît** selon un taux γ :

$$\frac{da}{dt} = 1_{\text{hot}}(x(t)) - \gamma a(t). \quad (1)$$

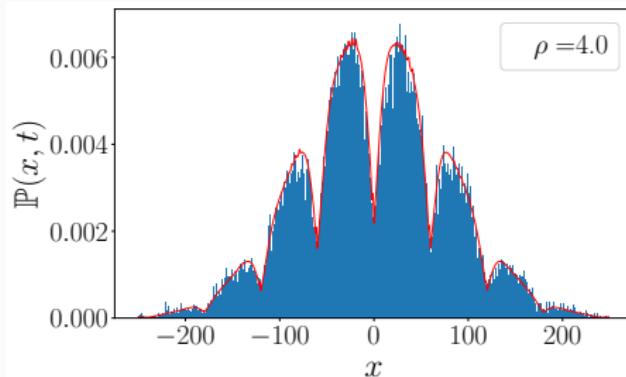
- Modèle **physiquement réaliste** : l'activation ne peut pas croître indéfiniment.
- Ce mécanisme induit une **transition dynamique** entre phase gaussienne et non-gaussienne.
- Comportement non-gaussien si $L\sqrt{\gamma} \gg 1$:

Mémoire relaxée

Modèle relaxant : les points chauds sont toujours distribués **périodiquement** (période L), mais l'activation **décroît** selon un taux γ :

$$\frac{da}{dt} = 1_{\text{hot}}(x(t)) - \gamma a(t). \quad (1)$$

- Modèle **physiquement réaliste** : l'activation ne peut pas croître indéfiniment.
- Ce mécanisme induit une **transition dynamique** entre phase gaussienne et non-gaussienne.
- Comportement non-gaussien si $L\sqrt{\gamma} \gg 1$:



Conclusion

- La LARW est un modèle minimal de marcheurs **perturbés localement**, comme des cellules immunitaires.

Conclusion

- La LARW est un modèle minimal de marcheurs **perturbés localement**, comme des cellules immunitaires.
- Dans toutes les dimensions, elle présente une statistique clairement **non-gaussienne**.

Conclusion

- La LARW est un modèle minimal de marcheurs **perturbés localement**, comme des cellules immunitaires.
- Dans toutes les dimensions, elle présente une statistique clairement **non-gaussienne**.
- La diffusion est généralement anormale : $\langle x^2(t) \rangle \propto t^\mu$, avec $\mu \neq 1$.

Conclusion

- La LARW est un modèle minimal de marcheurs **perturbés localement**, comme des cellules immunitaires.
- Dans toutes les dimensions, elle présente une statistique clairement **non-gaussienne**.
- La diffusion est généralement anormale : $\langle x^2(t) \rangle \propto t^\mu$, avec $\mu \neq 1$.
- En $d = 1, 2$:
 - Accélération : **expulsion** du point chaud
 - Décélération : **localisation** sur le point chaud.

Conclusion

- La LARW est un modèle minimal de marcheurs **perturbés localement**, comme des cellules immunitaires.
- Dans toutes les dimensions, elle présente une statistique clairement **non-gaussienne**.
- La diffusion est généralement anormale : $\langle x^2(t) \rangle \propto t^\mu$, avec $\mu \neq 1$.
- En $d = 1, 2$:
 - Accélération : **expulsion** du point chaud
 - Décélération : **localisation** sur le point chaud.
- Si la densité de points chauds est $\rho > 0$ (finie) : les effets de mémoire deviennent triviaux
⇒ comportement **gaussien** à long temps.

Conclusion

- La LARW est un modèle minimal de marcheurs **perturbés localement**, comme des cellules immunitaires.
- Dans toutes les dimensions, elle présente une statistique clairement **non-gaussienne**.
- La diffusion est généralement anormale : $\langle x^2(t) \rangle \propto t^\mu$, avec $\mu \neq 1$.
- En $d = 1, 2$:
 - Accélération : **expulsion** du point chaud
 - Décélération : **localisation** sur le point chaud.
- Si la densité de points chauds est $\rho > 0$ (finie) : les effets de mémoire deviennent triviaux
⇒ comportement **gaussien** à long temps.
- La **relaxation** (physiquement inévitable) réintroduit des effets de mémoire **non triviaux**, même en présence de plusieurs points chauds.

Marches auto-interagissantes

*Après avoir vu l'effet d'une mémoire externe localisée, que se passe-t-il si le marcheur **construit sa propre mémoire** ?*

Illustration et motivation

Q : Comment quantifier l'exploration spatiale d'une marche
auto-repoussée ou auto-attirée?

Illustration et motivation

Q : Comment quantifier l'exploration spatiale d'une marche
auto-repoussée ou auto-attirée?

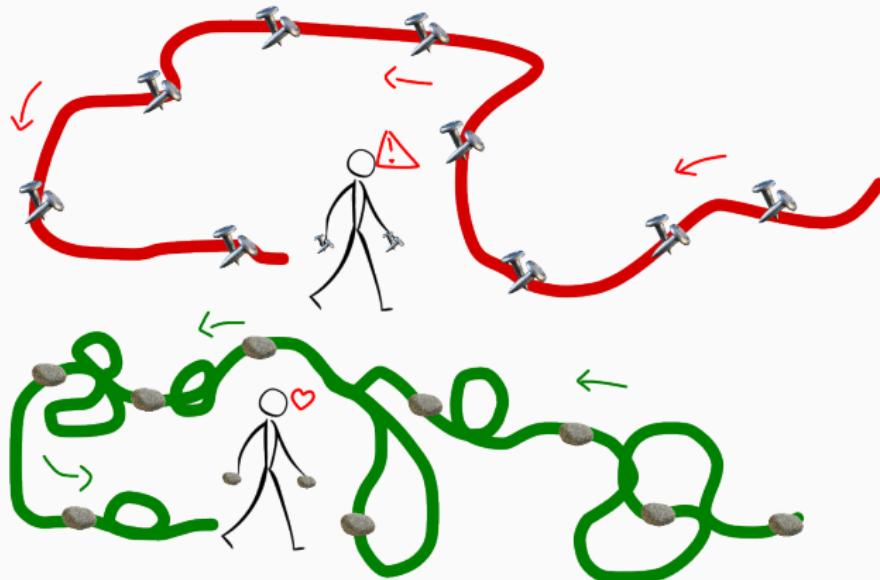
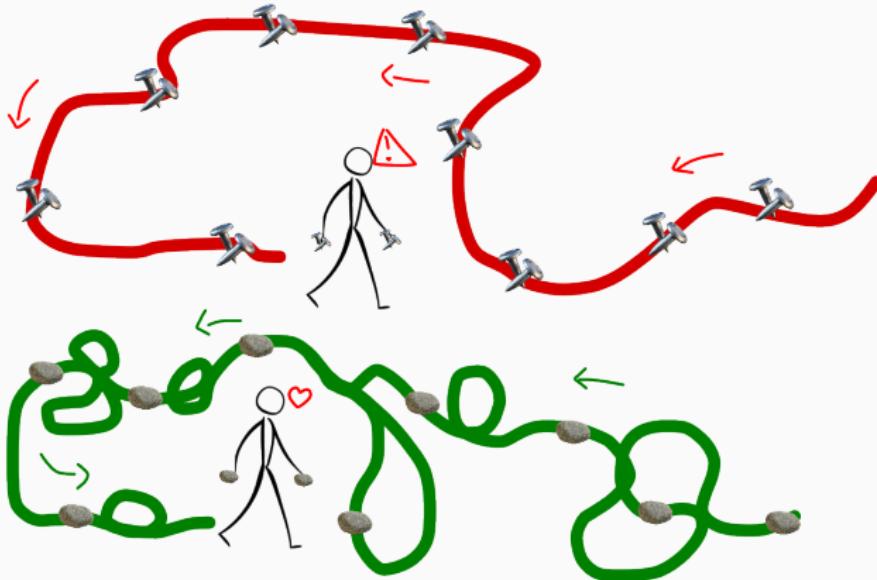


Illustration et motivation

Q : Comment quantifier l'exploration spatiale d'une marche
auto-repoussée ou auto-attirée?



Défi : Cette fois-ci, le marcheur construit dynamiquement **son propre environnement**, et la mémoire est faite de **toute** la trajectoire passée.

SIRW : Définition et idée générale

- La SIRW (marche auto-interagissante) est une marche aléatoire en espace et temps discrets sur \mathbb{Z} .

SIRW : Définition et idée générale

- La SIRW (marche auto-interagissante) est une marche aléatoire en espace et temps discrets sur \mathbb{Z} .
- La probabilité de transition dépend de l'**historique** du marcheur via le **temps local des arêtes** $L_t(x)$, nombre de traversées de l'arête $\{x, x + 1\}$:

$$P_t(x \pm 1|x) \propto w(L_t(x \pm 1)).$$

SIRW : Définition et idée générale

- La SIRW (marche auto-interagissante) est une marche aléatoire en espace et temps discrets sur \mathbb{Z} .
- La probabilité de transition dépend de l'**historique** du marcheur via le **temps local des arêtes** $L_t(x)$, nombre de traversées de l'arête $\{x, x + 1\}$:

$$P_t(x \pm 1|x) \propto w(L_t(x \pm 1)).$$

- Si $w(n)$ décroît, la marche est **répulsive** (exploratrice), si $w(n)$ croît, elle est **attractive** (timide).

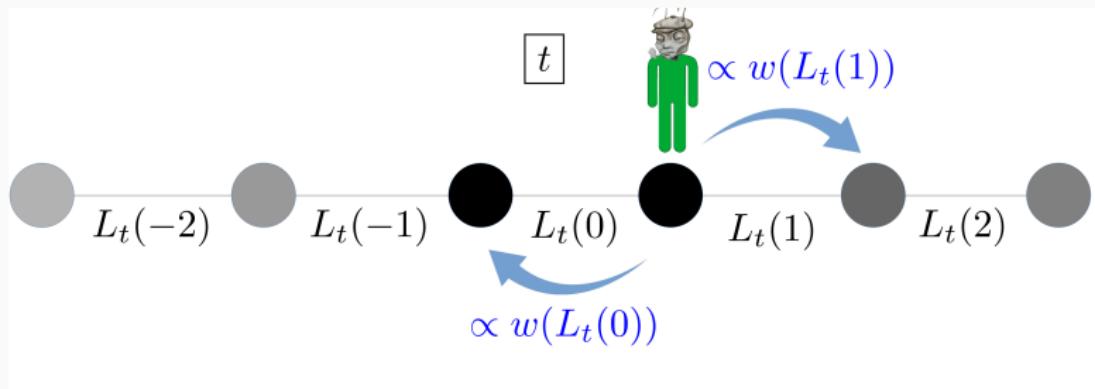
SIRW : Définition et idée générale

- La SIRW (marche auto-interagissante) est une marche aléatoire en espace et temps discrets sur \mathbb{Z} .
- La probabilité de transition dépend de l'**historique** du marcheur via le **temps local des arêtes** $L_t(x)$, nombre de traversées de l'arête $\{x, x + 1\}$:

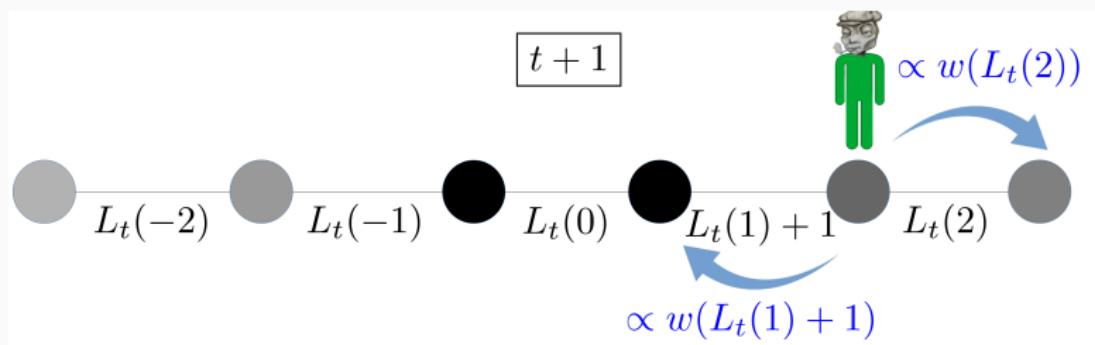
$$P_t(x \pm 1|x) \propto w(L_t(x \pm 1)).$$

- Si $w(n)$ décroît, la marche est **répulsive** (exploratrice), si $w(n)$ croît, elle est **attractive** (timide).
- **Exemple** : le modèle séminal **TSAW** d'Amit–Parisi–Peliti, défini par $w(n) = e^{-\beta n}$, est donc **répulsif**.

SIRW : Illustration de la définition



SIRW : Illustration de la définition



Trois grandes classes universelles de SIRW

Trois grandes classes de SIRWs [Tóth]:

Trois grandes classes universelles de SIRW

Trois grandes classes de SIRWs [Tóth]:

- **SATW_ϕ** : $w(n) = \delta_{n,0}/\phi + (1 - \delta_{n,0})$ [Répulsive si $\phi < 1$]

Trois grandes classes universelles de SIRW

Trois grandes classes de SIRWs [Tóth]:

- **SATW_ϕ** : $w(n) = \delta_{n,0}/\phi + (1 - \delta_{n,0})$ [Répulsive si $\phi < 1$]
- **PSRW_γ** : $w(n) = n^{-\gamma}$ [Répulsive]

Trois grandes classes universelles de SIRW

Trois grandes classes de SIRWs [Tóth]:

- **SATW_ϕ** : $w(n) = \delta_{n,0}/\phi + (1 - \delta_{n,0})$ [Répulsive si $\phi < 1$]
- **PSRW_γ** : $w(n) = n^{-\gamma}$ [Répulsive]
- **SESRW_{κ,β}** : $w(n) = e^{-\beta n^\kappa}$ [Répulsive]

Trois grandes classes universelles de SIRW

Trois grandes classes de SIRWs [Tóth]:

- **SATW_ϕ** : $w(n) = \delta_{n,0}/\phi + (1 - \delta_{n,0})$ [Répulsive si $\phi < 1$]
- **PSRW_γ** : $w(n) = n^{-\gamma}$ [Répulsive]
- **SESRW_{κ,β}** : $w(n) = e^{-\beta n^\kappa}$ [Répulsive]

L'appartenance à une classe dépend du comportement **asymptotique** de $w(n)$.

Trois grandes classes universelles de SIRW

Trois grandes classes de SIRWs [Tóth]:

- **SATW_ϕ** : $w(n) = \delta_{n,0}/\phi + (1 - \delta_{n,0})$ [Répulsive si $\phi < 1$]
- **PSRW_γ** : $w(n) = n^{-\gamma}$ [Répulsive]
- **SESRW_{κ,β}** : $w(n) = e^{-\beta n^\kappa}$ [Répulsive]

L'appartenance à une classe dépend du comportement **asymptotique** de $w(n)$.

Ainsi, toutes les SIRWs dont l'auto-interaction **sature** tombent dans la classe SATW_ϕ.

Trois grandes classes universelles de SIRW

Trois grandes classes de SIRWs [Tóth]:

- **SATW_ϕ** : $w(n) = \delta_{n,0}/\phi + (1 - \delta_{n,0})$ [Répulsive si $\phi < 1$]
- **PSRW_γ** : $w(n) = n^{-\gamma}$ [Répulsive]
- **SESRW_{κ,β}** : $w(n) = e^{-\beta n^\kappa}$ [Répulsive]

L'appartenance à une classe dépend du comportement **asymptotique** de $w(n)$.

Ainsi, toutes les SIRWs dont l'auto-interaction **sature** tombent dans la classe SATW_ϕ.

De même, les SIRWs dont l'auto-interaction dépend uniquement du **gradient** du temps local des arêtes tombent dans la classe TSAW (SESRW_{κ=1,β}).

Trois grandes classes universelles de SIRW

Trois grandes classes de SIRWs [Tóth]:

- **SATW_ϕ** : $w(n) = \delta_{n,0}/\phi + (1 - \delta_{n,0})$ [Répulsive si $\phi < 1$]
- **PSRW_γ** : $w(n) = n^{-\gamma}$ [Répulsive]
- **SESRW_{κ,β}** : $w(n) = e^{-\beta n^\kappa}$ [Répulsive]

L'appartenance à une classe dépend du comportement **asymptotique** de $w(n)$.

Ainsi, toutes les SIRWs dont l'auto-interaction **sature** tombent dans la classe SATW_ϕ.

De même, les SIRWs dont l'auto-interaction dépend uniquement du **gradient** du temps local des arêtes tombent dans la classe TSAW (SESRW_{κ=1,β}).

On écarte les marches attractives non saturantes, qui sont soit **piégées**, soit ont un comportement **non physique** [Pemantle, Diaconis, Davis].

Motivations expérimentales et théoriques

- Modèle très naturel : un marcheur réel interagit avec son environnement. Si cette interaction est **locale**, la SIRW en donne une modélisation **fidèle**.

Motivations expérimentales et théoriques

- Modèle très naturel : un marcheur réel interagit avec son environnement. Si cette interaction est **locale**, la SIRW en donne une modélisation **fidèle**.
- Ce type de dynamique est observé chez des micro-organismes et des cellules [Golestanian et al., d'Alessandro et al], des fourmis [Dussutour et al.], et même des algorithmes d'échantillonnage [Maggs].

Motivations expérimentales et théoriques

- Modèle très naturel : un marcheur réel interagit avec son environnement. Si cette interaction est **locale**, la SIRW en donne une modélisation **fidèle**.
- Ce type de dynamique est observé chez des micro-organismes et des cellules [Golestanian et al., d'Alessandro et al], des fourmis [Dussutour et al.], et même des algorithmes d'échantillonnage [Maggs].
- Modèle central en mathématiques : objet de nombreux travaux théoriques profonds [Tóth, Werner, Dumaz, Pemantle, Yor...].

Motivations expérimentales et théoriques

- Modèle très naturel : un marcheur réel interagit avec son environnement. Si cette interaction est **locale**, la SIRW en donne une modélisation **fidèle**.
- Ce type de dynamique est observé chez des micro-organismes et des cellules [Golestanian et al., d'Alessandro et al], des fourmis [Dussutour et al.], et même des algorithmes d'échantillonnage [Maggs].
- Modèle central en mathématiques : objet de nombreux travaux théoriques profonds [Tóth, Werner, Dumaz, Pemantle, Yor...].
- Difficulté intrinsèque : le modèle reste **mal compris**. De nombreuses observables restent inaccessibles : P , F , π ...

Motivations expérimentales et théoriques

- Modèle très naturel : un marcheur réel interagit avec son environnement. Si cette interaction est **locale**, la SIRW en donne une modélisation **fidèle**.
- Ce type de dynamique est observé chez des micro-organismes et des cellules [Golestanian et al., d'Alessandro et al], des fourmis [Dussutour et al.], et même des algorithmes d'échantillonnage [Maggs].
- Modèle central en mathématiques : objet de nombreux travaux théoriques profonds [Tóth, Werner, Dumaz, Pemantle, Yor...].
- Difficulté intrinsèque : le modèle reste **mal compris**. De nombreuses observables restent inaccessibles : $P, F, \pi\dots$
- **Objectif** : proposer une stratégie permettant un calcul **exact** de ces observables.

Contexte théorique : état de l'art

- Le comportement d'échelle $x(t) \sim t^{1/d_w}$ est connu [Amit et al, Tóth] :

$$d_w = \begin{cases} 2, \text{ diffusif} & (\text{SATW}_\phi, \text{PSRW}_\gamma) \\ \frac{\kappa+2}{\kappa+1} < 2, \text{ super-diffusif} & (\text{SESRW}_{\kappa,\beta}). \end{cases}$$

Contexte théorique : état de l'art

- Le comportement d'échelle $x(t) \sim t^{1/d_w}$ est connu [Amit et al, Tóth] :

$$d_w = \begin{cases} 2, \text{ diffusif} & (\text{SATW}_\phi, \text{PSRW}_\gamma) \\ \frac{\kappa+2}{\kappa+1} < 2, \text{ super-diffusif} & (\text{SESRW}_{\kappa,\beta}). \end{cases}$$

- Seules quelques observables ont été calculées : splitting π et temps de premier passage F de la SATW_ϕ [Carmona, Petit, Yor], et propagateur P de la TSAW [Dumaz et Tóth].

Nos résultats principaux

Nous avons obtenu de façon **exacte** :

- L'**exposant de persistance** θ , qui caractérise la décroissance algébrique du temps de premier passage :

$$F(x, t) \sim t^{-1-\theta}.$$

Nos résultats principaux

Nous avons obtenu de façon **exacte** :

- L'**exposant de persistance** θ , qui caractérise la décroissance algébrique du temps de premier passage :

$$F(x, t) \sim t^{-1-\theta}.$$

Sa détermination est un **problème central** en physique statistique [Bray et al., Derrida-Hakim-Pasquier], et réputée **difficile** pour un processus non-markovien quelconque.

Nos résultats principaux

Nous avons obtenu de façon **exacte** :

- L'**exposant de persistance** θ , qui caractérise la décroissance algébrique du temps de premier passage :

$$F(x, t) \sim t^{-1-\theta}.$$

Sa détermination est un **problème central** en physique statistique [Bray et al., Derrida-Hakim-Pasquier], et réputée **difficile** pour un processus non-markovien quelconque.

- La **probabilité de splitting** π .

Nos résultats principaux

Nous avons obtenu de façon **exacte** :

- L'**exposant de persistance** θ , qui caractérise la décroissance algébrique du temps de premier passage :

$$F(x, t) \sim t^{-1-\theta}.$$

Sa détermination est un **problème central** en physique statistique [Bray et al., Derrida-Hakim-Pasquier], et réputée **difficile** pour un processus non-markovien quelconque.

- La **probabilité de splitting** π .
- Le **propagateur** P pour les classes $SATW_\phi$ et $PSRW_\gamma$.

Nos résultats principaux

Nous avons obtenu de façon **exacte** :

- L'**exposant de persistance** θ , qui caractérise la décroissance algébrique du temps de premier passage :

$$F(x, t) \sim t^{-1-\theta}.$$

Sa détermination est un **problème central** en physique statistique [Bray et al., Derrida-Hakim-Pasquier], et réputée **difficile** pour un processus non-markovien quelconque.

- La **probabilité de splitting** π .
- Le **propagateur** P pour les classes $SATW_\phi$ et $PSRW_\gamma$. Même leur **coefficient de diffusion** $\langle x^2(t) \rangle = 2Dt$ était inaccessible !

Nos résultats principaux

Nous avons obtenu de façon **exacte** :

- L'**exposant de persistance** θ , qui caractérise la décroissance algébrique du temps de premier passage :

$$F(x, t) \sim t^{-1-\theta}.$$

Sa détermination est un **problème central** en physique statistique [Bray et al., Derrida-Hakim-Pasquier], et réputée **difficile** pour un processus non-markovien quelconque.

- La **probabilité de splitting** π .
- Le **propagateur** P pour les classes $SATW_\phi$ et $PSRW_\gamma$. Même leur **coefficients de diffusion** $\langle x^2(t) \rangle = 2Dt$ était inaccessible !

Le calcul explicite de ces observables représentait un **problème ouvert** important, tant en physique qu'en mathématiques.

Nos résultats principaux

Nous avons obtenu de façon **exacte** :

- L'**exposant de persistance** θ , qui caractérise la décroissance algébrique du temps de premier passage :

$$F(x, t) \sim t^{-1-\theta}.$$

Sa détermination est un **problème central** en physique statistique [Bray et al., Derrida-Hakim-Pasquier], et réputée **difficile** pour un processus non-markovien quelconque.

- La **probabilité de splitting** π .
- Le **propagateur** P pour les classes $SATW_\phi$ et $PSRW_\gamma$. Même leur **coefficient de diffusion** $\langle x^2(t) \rangle = 2Dt$ était inaccessible !

Le calcul explicite de ces observables représentait un **problème ouvert** important, tant en physique qu'en mathématiques.

Nous détaillons ici notre stratégie pour le calcul de π , puis de celui des exposants de persistance θ .

Stratégie de calcul de la probabilité de splitting π

- Soit T_k le premier instant où la SIRW atteint le site k .

Stratégie de calcul de la probabilité de splitting π

- Soit T_k le premier instant où la SIRW atteint le site k .
- On note $q_+(k, L)$ la loi du nombre $L + 1$ de sites visités à l'instant T_k .

Stratégie de calcul de la probabilité de splitting π

- Soit T_k le premier instant où la SIRW atteint le site k .
- On note $q_+(k, L)$ la loi du nombre $L + 1$ de sites visités à l'instant T_k .
- La probabilité de splitting π de toucher k avant $-m$ s'écrit:

$$\pi(\underline{k}, -m) = \sum_{j=k}^{k+m-1} q_+(k, j).$$

Stratégie de calcul de la probabilité de splitting π

- Soit T_k le premier instant où la SIRW atteint le site k .
- On note $q_+(k, L)$ la loi du nombre $L + 1$ de sites visités à l'instant T_k .
- La probabilité de splitting π de toucher k avant $-m$ s'écrit:

$$\pi(\underline{k}, -m) = \sum_{j=k}^{k+m-1} q_+(k, j).$$

- Il suffit donc de connaître la distribution du **support du temps local d'arête**.

Illustration : temps local d'arête et support

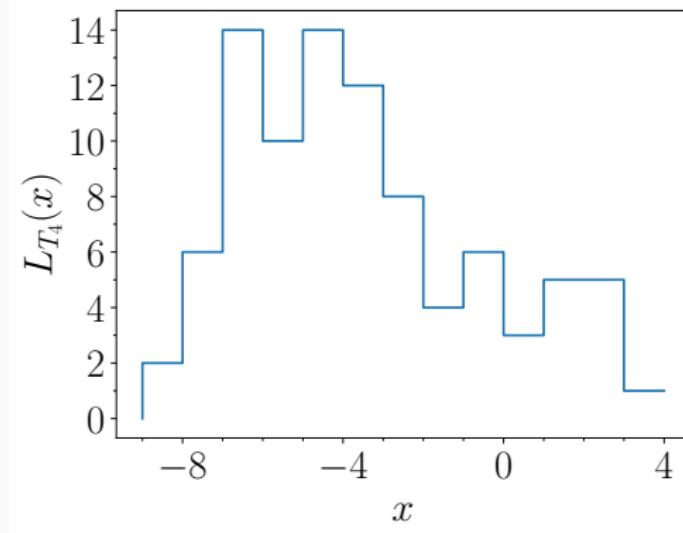


Figure 2: Nombre de traversées de chaque arête $\{x, x - 1\}$, au moment du premier passage en $k = 4$. Ici, $L + 1 = 14$ sites ont été visités.

Illustration : temps local d'arête et support

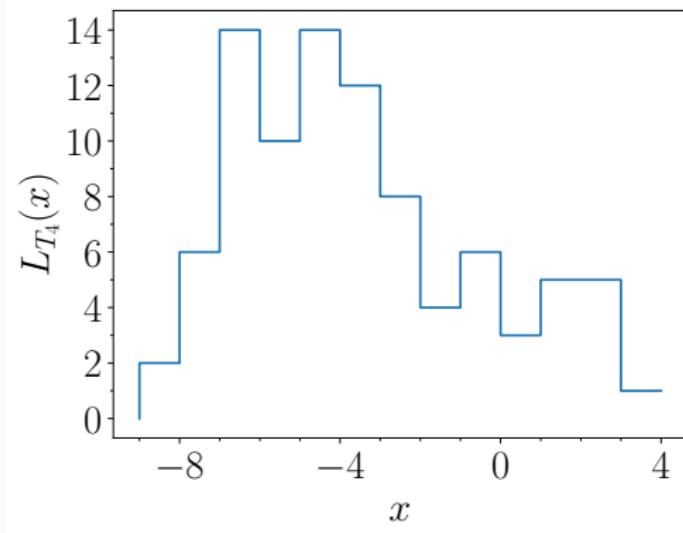


Figure 2: Nombre de traversées de chaque arête $\{x, x - 1\}$, au moment du premier passage en $k = 4$. Ici, $L + 1 = 14$ sites ont été visités.

$q_+(k, L)$ est donc la loi de la taille L du support de $(L_{T_k}(x))_x$.

Théorie de Ray-Knight pour la SIRW

- À grande échelle, [Tóth] a montré que le processus $(L_{T_k}(k - x))_{x \geq 0}$ converge vers un **processus de Bessel carré** (BESQ_δ) :

$$dY(x) = \delta dx + 2\sqrt{Y(x)} dB_x, \quad Y(0) = 0.$$

Théorie de Ray-Knight pour la SIRW

- À grande échelle, [Tóth] a montré que le processus $(L_{T_k}(k-x))_{x \geq 0}$ converge vers un **processus de Bessel carré** (BESQ_δ) :

$$dY(x) = \delta dx + 2\sqrt{Y(x)} dB_x, \quad Y(0) = 0.$$

- Le paramètre δ est entièrement déterminé par la fonction de poids w de la SIRW.

Théorie de Ray-Knight pour la SIRW

- À grande échelle, [Tóth] a montré que le processus $(L_{T_k}(k-x))_{x \geq 0}$ converge vers un **processus de Bessel carré** (BESQ_δ) :

$$dY(x) = \delta dx + 2\sqrt{Y(x)} dB_x, \quad Y(0) = 0.$$

- Le paramètre δ est entièrement déterminé par la fonction de poids w de la SIRW.
- Ce résultat, pourtant puissant, est presque **inconnu des physiciens**.

Théorie de Ray-Knight pour la SIRW

- À grande échelle, [Tóth] a montré que le processus $(L_{T_k}(k-x))_{x \geq 0}$ converge vers un **processus de Bessel carré** (BESQ_δ) :

$$dY(x) = \delta dx + 2\sqrt{Y(x)} dB_x, \quad Y(0) = 0.$$

- Le paramètre δ est entièrement déterminé par la fonction de poids w de la SIRW.
- Ce résultat, pourtant puissant, est presque **inconnu des physiciens**. Il permet de connaître la loi des **variables cachées** gouvernant l'évolution du processus : la dynamique non-markovienne se ramène à un problème **markovien tractable**.

Théorie de Ray-Knight pour la SIRW

- À grande échelle, [Tóth] a montré que le processus $(L_{T_k}(k-x))_{x \geq 0}$ converge vers un **processus de Bessel carré** (BESQ_δ) :

$$dY(x) = \delta dx + 2\sqrt{Y(x)} dB_x, \quad Y(0) = 0.$$

- Le paramètre δ est entièrement déterminé par la fonction de poids w de la SIRW.
- Ce résultat, pourtant puissant, est presque **inconnu des physiciens**. Il permet de connaître la loi des **variables cachées** gouvernant l'évolution du processus : la dynamique non-markovienne se ramène à un problème **markovien tractable**.
- Notre contribution : relier la probabilité de splitting π à la loi du **support** du temps local d'arête $(L_{T_k}(x))_{x \in \mathbb{Z}}$ — ce lien rend possible le calcul explicite de π .

Illustration : théorie de Ray-Knight

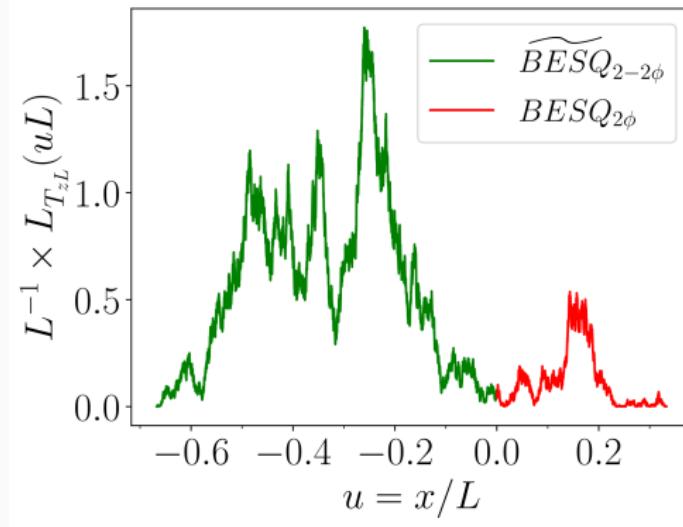


Figure 3: Temps local d'arêtes pour une $SATW_{\phi=\log 2}$, avec $k = zL = 5000$.

Illustration : théorie de Ray-Knight

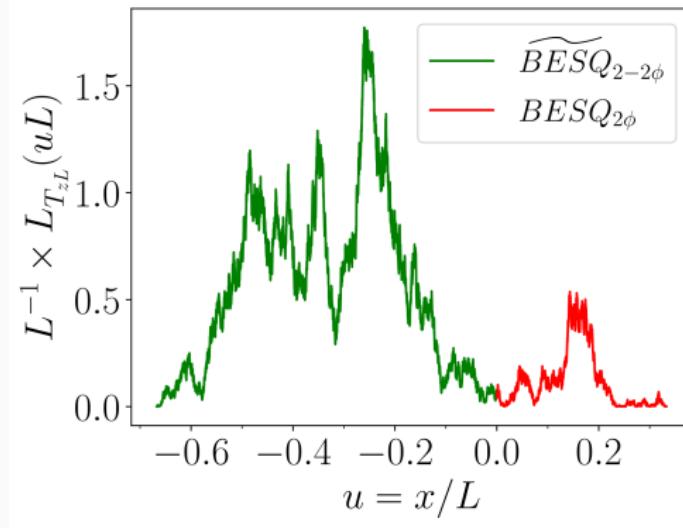


Figure 3: Temps local d'arêtes pour une $SATW_{\phi=\log 2}$, avec $k = zL = 5000$.

→ On en déduit la loi de q_+ , et donc π .

Résultats analytiques : Splitting π

Dans la limite $L \rightarrow \infty$, la probabilité d'atteindre zL avant $-(1-z)L$ est:

$$\boxed{\pi(z) = \begin{cases} I_{1-z}(\phi) & (\text{SATW}_\phi) \\ \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{1-z} & (\text{PSRW, SESRW}) \end{cases}}$$

avec $I_z(a) = \frac{\Gamma(2a)}{\Gamma(a)^2} \int_0^z (u(1-u))^{a-1} du.$

Résultats analytiques : Splitting π

Dans la limite $L \rightarrow \infty$, la probabilité d'atteindre zL avant $-(1-z)L$ est:

$$\pi(z) = \begin{cases} I_{1-z}(\phi) & (\text{SATW}_\phi) \\ \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{1-z} & (\text{PSRW, SESRW}) \end{cases}$$

avec $I_z(a) = \frac{\Gamma(2a)}{\Gamma(a)^2} \int_0^z (u(1-u))^{a-1} du$.

π ne dépend **d'aucun paramètre du modèle** (!) dans les cas PSRW et SESRW, suivant une loi de l'arcsinus.

Exposants de persistance θ

On obtient l'exposant de persistance θ (défini par $F(x, t) \propto t^{-1-\theta}$) à partir du comportement asymptotique:

$$\pi(z) \propto (1-z)^{d_w \theta} \quad \text{lorsque } z \rightarrow 1^- \quad [\text{Zoia et al}].$$

Exposants de persistance θ

On obtient l'exposant de persistance θ (défini par $F(x, t) \propto t^{-1-\theta}$) à partir du comportement asymptotique:

$$\pi(z) \propto (1-z)^{d_w \theta} \quad \text{lorsque } z \rightarrow 1^- \quad [\text{Zoia et al}].$$

$$\theta = \begin{cases} \frac{\phi}{2} & (\text{SATW}_\phi) \\ \frac{1}{4} & (\text{PSRW}_\gamma) \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\kappa+1}{\kappa+2} & (\text{SESRW}_{\kappa,\beta}). \end{cases}$$

Exposants de persistance θ

On obtient l'exposant de persistance θ (défini par $F(x, t) \propto t^{-1-\theta}$) à partir du comportement asymptotique:

$$\pi(z) \propto (1-z)^{d_w \theta} \quad \text{lorsque } z \rightarrow 1^- \quad [\text{Zoia et al}].$$

$$\theta = \begin{cases} \frac{\phi}{2} & (\text{SATW}_\phi) \\ \frac{1}{4} & (\text{PSRW}_\gamma) \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\kappa+1}{\kappa+2} & (\text{SESRW}_{\kappa,\beta}). \end{cases}$$

Un tel résultat est particulièrement rare : pour un processus non-markovien comme la SIRW, l'exposant de persistance est généralement **inaccessible analytiquement** [Bray et al].

Exposants de persistance θ

On obtient l'exposant de persistance θ (défini par $F(x, t) \propto t^{-1-\theta}$) à partir du comportement asymptotique:

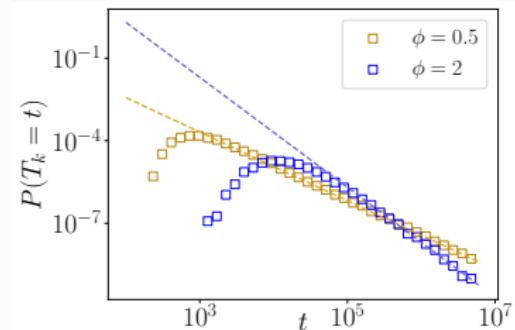
$$\pi(z) \propto (1-z)^{d_w \theta} \quad \text{lorsque } z \rightarrow 1^- \quad [\text{Zoia et al}].$$

$$\theta = \begin{cases} \frac{\phi}{2} & (\text{SATW}_\phi) \\ \frac{1}{4} & (\text{PSRW}_\gamma) \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\kappa+1}{\kappa+2} & (\text{SESRW}_{\kappa,\beta}). \end{cases}$$

Un tel résultat est particulièrement rare : pour un processus non-markovien comme la SIRW, l'exposant de persistance est généralement **inaccessible analytiquement** [Bray et al].

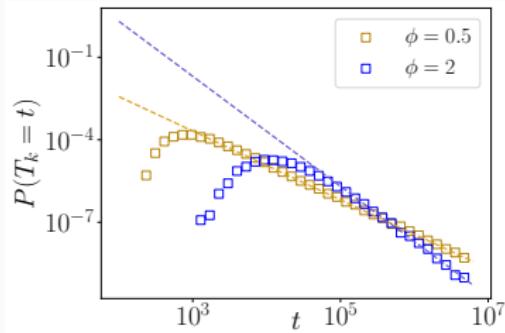
Dans le cas SATW $_\phi$, l'exposant θ peut prendre **n'importe quelle valeur positive, alors que le processus est diffusif !**

Confirmation numérique de notre expression de θ

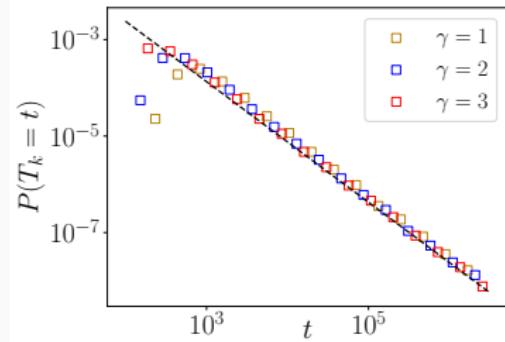


(a) $SATW_\phi$

Confirmation numérique de notre expression de θ

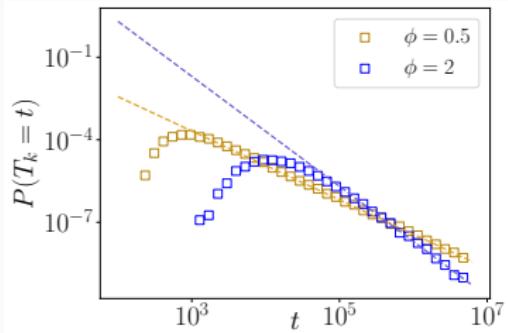


(a) SATW $_\phi$

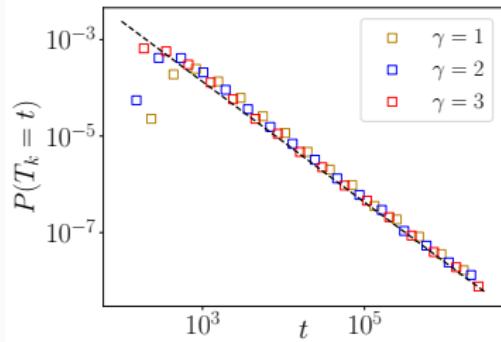


(b) PSRW $_\gamma$

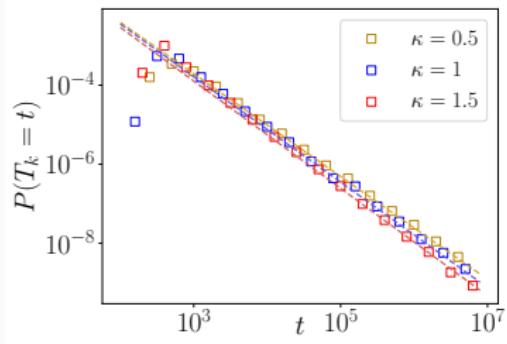
Confirmation numérique de notre expression de θ



(a) SATW $_{\phi}$



(b) PSRW $_{\gamma}$



(c) SESRW $_{\kappa,\beta}$

Résultats analytiques : propagateurs

- Les marches PSRW $_{\gamma}$ et SATW $_{\phi}$ sont diffusives :

$$P(x, t) \sim \frac{1}{\sqrt{2t}} p\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)$$

Résultats analytiques : propagateurs

- Les marches PSRW $_{\gamma}$ et SATW $_{\phi}$ sont diffusives :

$$P(x, t) \sim \frac{1}{\sqrt{2t}} p\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)$$

- Après avoir exprimé p à partir des temps locaux d'arête et effectué les calculs techniques, on obtient :

$$p(u) = \frac{(\phi - 1)B\left(\phi, \frac{\phi+1}{2}\right)}{B(\phi, \phi)\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1-\phi}{2}\right)_n (\phi)_n}{\left(\frac{1+3\phi}{2}\right)_n} \frac{n + \frac{\phi}{2}}{(n + \frac{\phi-1}{2})(n + \frac{\phi+1}{2})} \frac{e^{-u^2(2n+\phi)^2}}{n!}.$$

Résultats analytiques : propagateurs

- Les marches PSRW $_{\gamma}$ et SATW $_{\phi}$ sont diffusives :

$$P(x, t) \sim \frac{1}{\sqrt{2t}} p\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)$$

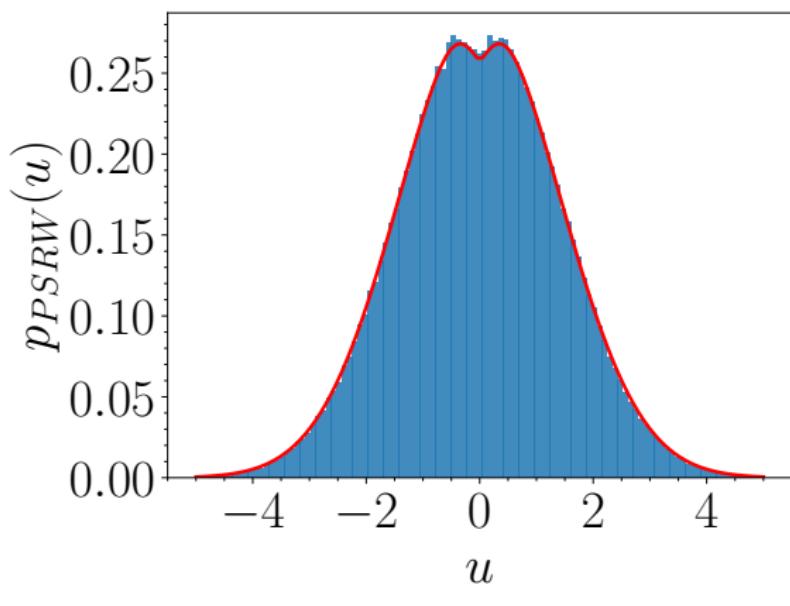
- Après avoir exprimé p à partir des temps locaux d'arête et effectué les calculs techniques, on obtient :

$$p(u) = \frac{(\phi - 1)B\left(\phi, \frac{\phi+1}{2}\right)}{B(\phi, \phi)\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1-\phi}{2}\right)_n (\phi)_n}{\left(\frac{1+3\phi}{2}\right)_n} \frac{n + \frac{\phi}{2}}{(n + \frac{\phi-1}{2})(n + \frac{\phi+1}{2})} \frac{e^{-u^2(2n+\phi)^2}}{n!}.$$

- Le coefficient de diffusion D est désormais accessible. Pour PSRW $_{\gamma}$:

$$D_{PSRW_{\gamma}} = (2\gamma + 1) \left(\frac{1}{2} + C_{\text{Catalan}} + \frac{\pi^2}{16} \right).$$

Confirmation numérique : propagateur de la PSRW



PSRW avec $\gamma = 4$

Conclusion

Nous avons obtenu **exactement** plusieurs observables clés des SIRW : **densité de premier passage** F (via θ), **propagateur** P , **probabilité de splitting** π .

Conclusion

Nous avons obtenu **exactement** plusieurs observables clés des SIRW : **densité de premier passage** F (via θ), **propagateur** P , **probabilité de splitting** π .

Ces quantités (y compris le coefficient de diffusion !) étaient longtemps restées **inaccessibles**, et leur détermination représentait une **question ouverte** en mathématiques et en physique.

Conclusion

Nous avons obtenu **exactement** plusieurs observables clés des SIRW : **densité de premier passage** F (via θ), **propagateur** P , **probabilité de splitting** π .

Ces quantités (y compris le coefficient de diffusion !) étaient longtemps restées **inaccessibles**, et leur détermination représentait une **question ouverte** en mathématiques et en physique.

- Résultats de [Tóth] \Rightarrow accès à la **statistique des degrés de liberté cachés du processus**, $L_t(x)$.

Conclusion

Nous avons obtenu **exactement** plusieurs observables clés des SIRW : **densité de premier passage** F (via θ), **propagateur** P , **probabilité de splitting** π .

Ces quantités (y compris le coefficient de diffusion !) étaient longtemps restées **inaccessibles**, et leur détermination représentait une **question ouverte** en mathématiques et en physique.

- Résultats de [Tóth] \Rightarrow accès à la **statistique des degrés de liberté cachés du processus**, $L_t(x)$.
- Réécriture via $L_t(x)$ \Rightarrow calcul tractable de P et π .

Conclusion

Nous avons obtenu **exactement** plusieurs observables clés des SIRW : **densité de premier passage** F (via θ), **propagateur** P , **probabilité de splitting** π .

Ces quantités (y compris le coefficient de diffusion !) étaient longtemps restées **inaccessibles**, et leur détermination représentait une **question ouverte** en mathématiques et en physique.

- Résultats de [Tóth] \Rightarrow accès à la **statistique des degrés de liberté cachés du processus**, $L_t(x)$.
- Réécriture via $L_t(x)$ \Rightarrow calcul tractable de P et π .
- Relation d'échelle \Rightarrow **exposants de persistance** exacts.

Conclusion

Nous avons obtenu **exactement** plusieurs observables clés des SIRW : **densité de premier passage** F (via θ), **propagateur** P , **probabilité de splitting** π .

Ces quantités (y compris le coefficient de diffusion !) étaient longtemps restées **inaccessibles**, et leur détermination représentait une **question ouverte** en mathématiques et en physique.

- Résultats de [Tóth] \Rightarrow accès à la **statistique des degrés de liberté cachés du processus**, $L_t(x)$.
- Réécriture via $L_t(x)$ \Rightarrow calcul tractable de P et π .
- Relation d'échelle \Rightarrow **exposants de persistance** exacts.
- Le calcul du propagateur P constitue une **généralisation exacte** du **théorème central limite** à un cas précis de sommes de variables **fortement corrélées** : les incrémentés des SIRWs.

Vers une théorie générale de l'exploration non-markovienne

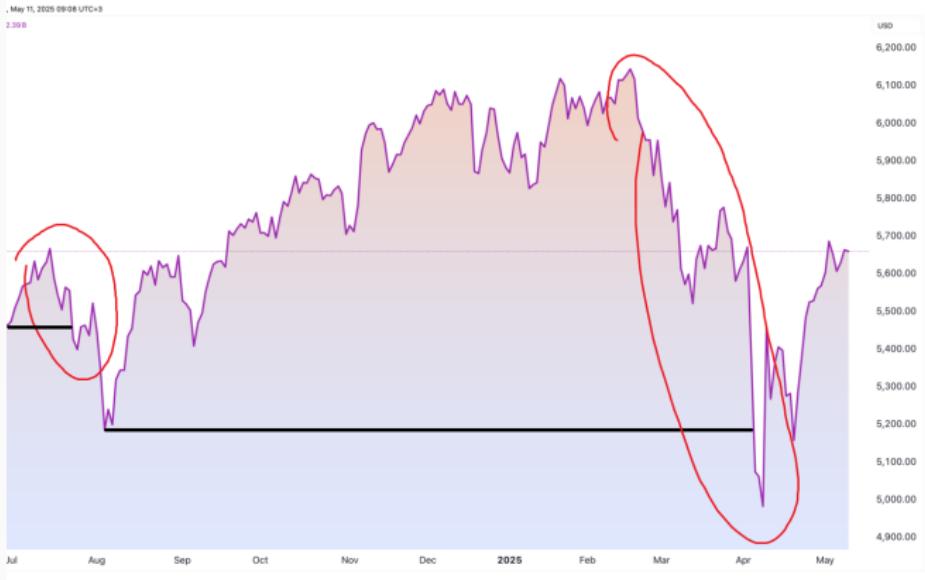
Peut-on quantifier la tendance d'un processus quelconque à toujours explorer dans la même direction ?

Question centrale



Évolution de l'indice boursier S&P500 de Juillet 2024 à Mai 2025.

Question centrale



Q : Comment prédire ces changements soudains de tendance, d'un maximum historique à un **krach** significatif ?
Nous appellerons ces événements des **flips**.

Flip : Définition et intérêt

- Le **flip** est une transition entre deux bords du domaine visité $[x_{\min}, x_{\max}]$.

Flip : Définition et intérêt

- Le **flip** est une transition entre deux bords du domaine visité $[x_{\min}, x_{\max}]$.
- Après avoir découvert un nouveau site en x_{\max} , le marcheur *flip* s'il atteint $x_{\min} - 1$ avant $x_{\max} + 1$ (ou vice-versa).

Flip : Définition et intérêt

- Le **flip** est une transition entre deux bords du domaine visité $[x_{\min}, x_{\max}]$.
- Après avoir découvert un nouveau site en x_{\max} , le marcheur *flip* s'il atteint $x_{\min} - 1$ avant $x_{\max} + 1$ (ou vice-versa).
- Quantifie la **persistence dans l'exploration** (ex. crash boursier après un pic).

Flip : Définition et intérêt

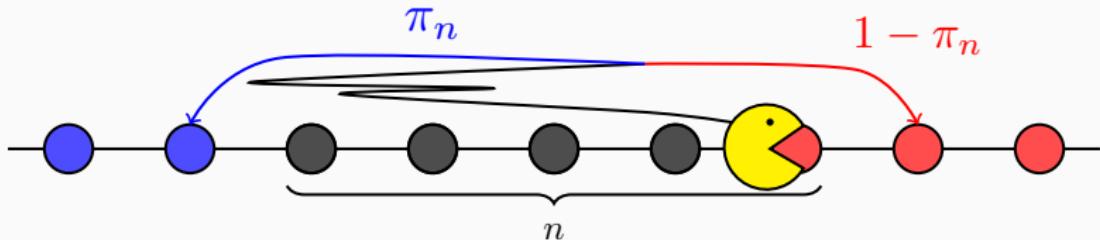
- Le **flip** est une transition entre deux bords du domaine visité $[x_{\min}, x_{\max}]$.
- Après avoir découvert un nouveau site en x_{\max} , le marcheur *flip* s'il atteint $x_{\min} - 1$ avant $x_{\max} + 1$ (ou vice-versa).
- Quantifie la **persistence dans l'exploration** (ex. crash boursier après un pic).
- On note π_n la probabilité de flip après avoir découvert un domaine de taille n .

Flip : Illustration

On peut voir les sites visités comme de la nourriture : rouge à droite, bleue à gauche. Un **flip** survient lorsque le marcheur consomme à la suite deux sites **de couleurs différentes**.

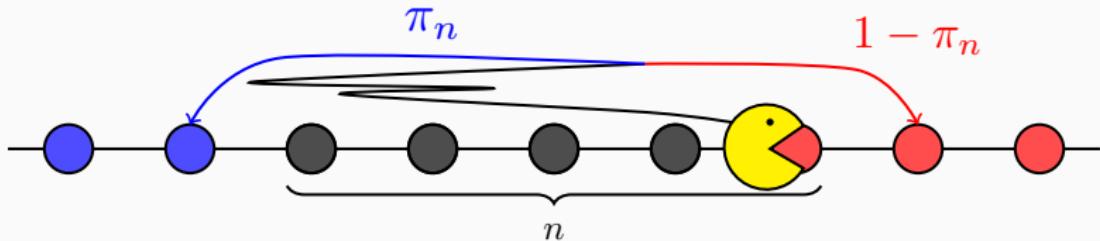
Flip : Illustration

On peut voir les sites visités comme de la nourriture : rouge à droite, bleue à gauche. Un **flip** survient lorsque le marcheur consomme à la suite deux sites de couleurs différentes.



Flip : Illustration

On peut voir les sites visités comme de la nourriture : rouge à droite, bleue à gauche. Un **flip** survient lorsque le marcheur consomme à la suite deux sites de couleurs différentes.



Dans cette analogie, un flip correspond au changement de direction de recherche de nourriture pour un animal.

Contexte et défis

- Nous avons vu qu'on peut quantifier **exactement** l'exploration de certaines marches non-markoviennes, lorsque le type de mémoire est **défini a priori**.

Contexte et défis

- Nous avons vu qu'on peut quantifier **exactement** l'exploration de certaines marches non-markoviennes, lorsque le type de mémoire est **défini a priori**.
- Mais dans les systèmes réels (biologie, finance...), la mémoire est souvent **inconnue** et doit être **modélisée à partir des données**.

Contexte et défis

- Nous avons vu qu'on peut quantifier **exactement** l'exploration de certaines marches non-markoviennes, lorsque le type de mémoire est **défini a priori**.
- Mais dans les systèmes réels (biologie, finance...), la mémoire est souvent **inconnue** et doit être **modélisée à partir des données**.
- Exemple : les marches auto-interagissantes reproduisent fidèlement le comportement de certaines cellules [d'Alessandro et al].
En revanche, pour des séries temporelles comme le S&P, **aucun modèle ne fait consensus**.

Contexte et défis

- Nous avons vu qu'on peut quantifier **exactement** l'exploration de certaines marches non-markoviennes, lorsque le type de mémoire est **défini a priori**.
- Mais dans les systèmes réels (biologie, finance...), la mémoire est souvent **inconnue** et doit être **modélisée à partir des données**.
- Exemple : les marches auto-interagissantes reproduisent fidèlement le comportement de certaines cellules [d'Alessandro et al].
En revanche, pour des séries temporelles comme le S&P, **aucun modèle ne fait consensus**.
- Pourtant, prédire les **flips** — ex. krachs — est essentiel pour comprendre et prédire l'évolution du système.

Contexte et défis

- Nous avons vu qu'on peut quantifier **exactement** l'exploration de certaines marches non-markoviennes, lorsque le type de mémoire est **défini a priori**.
- Mais dans les systèmes réels (biologie, finance...), la mémoire est souvent **inconnue** et doit être **modélisée à partir des données**.
- Exemple : les marches auto-interagissantes reproduisent fidèlement le comportement de certaines cellules [d'Alessandro et al].
En revanche, pour des séries temporelles comme le S&P, **aucun modèle ne fait consensus**.
- Pourtant, prédire les **flips** — ex. krachs — est essentiel pour comprendre et prédire l'évolution du système.
Comment alors estimer la **probabilité de flip**, sans connaître la mémoire du système ?

Universalité de la probabilité de flip

- **Sans conditionnement sur la visite de l'intervalle** $[x_{\min}, x_{\max}]$, la probabilité de **flip** π_n se réduit à la probabilité de **splitting** Q que, partant de x_{\max} , le marcheur visite $x_{\min} - 1$ avant $x_{\max} + 1$.

Universalité de la probabilité de flip

- **Sans conditionnement sur la visite de l'intervalle** $[x_{\min}, x_{\max}]$, la probabilité de **flip** π_n se réduit à la probabilité de **splitting** Q que, partant de x_{\max} , le marcheur visite $x_{\min} - 1$ avant $x_{\max} + 1$.
- Sa décroissance avec la taille $n \equiv x_{\max} - x_{\min}$ **dépend du processus** [Zoia et al]:

$$Q \propto 1/n^{d_w \theta}.$$

Universalité de la probabilité de flip

- **Sans conditionnement sur la visite de l'intervalle** $[x_{\min}, x_{\max}]$, la probabilité de **flip** π_n se réduit à la probabilité de **splitting** Q que, partant de x_{\max} , le marcheur visite $x_{\min} - 1$ avant $x_{\max} + 1$.
- Sa décroissance avec la taille $n \equiv x_{\max} - x_{\min}$ **dépend du processus** [Zoia et al]:

$$Q \propto 1/n^{d_w \theta}.$$

- En revanche, nous allons montrer que la probabilité de flip π_n , elle, a une décroissance **universelle** (!):

$$\boxed{\pi_n \sim \frac{A}{n}}.$$

Universalité de la probabilité de flip

- Sans conditionnement sur la visite de l'intervalle $[x_{\min}, x_{\max}]$, la probabilité de **flip** π_n se réduit à la probabilité de **splitting** Q que, partant de x_{\max} , le marcheur visite $x_{\min} - 1$ avant $x_{\max} + 1$.
- Sa décroissance avec la taille $n \equiv x_{\max} - x_{\min}$ **dépend du processus** [Zoia et al]:

$$Q \propto 1/n^{d_w \theta}.$$

- En revanche, nous allons montrer que la probabilité de flip π_n , elle, a une décroissance **universelle** (!):

$$\boxed{\pi_n \sim \frac{A}{n}}.$$

- La mémoire de l'intervalle visité a donc un **effet universel** sur la probabilité de flip et donc sur l'exploration future du processus: **on peut quantifier les flips sans connaître le processus sous-jacent!**

Preuve de l'universalité du scaling en $1/n$

- **Idée clé :** Si le marcheur *flip* au $(n + 1)$ -ème site visité x_{n+1} , après x_n , c'est qu'il a attendu un temps τ_n **assez long** avant de le visiter.

Preuve de l'universalité du scaling en $1/n$

- **Idée clé :** Si le marcheur *flip* au $(n + 1)$ -ème site visité x_{n+1} , après x_n , c'est qu'il a attendu un temps τ_n **assez long** avant de le visiter.
- En effet, si τ_n est trop court, le marcheur n'a pas le temps de parcourir tout le domaine visité: il reste près de x_n , et x_{n+1} est alors **du même signe que** x_n .

Preuve de l'universalité du scaling en $1/n$

- **Idée clé :** Si le marcheur *flip* au $(n + 1)$ -ème site visité x_{n+1} , après x_n , c'est qu'il a attendu un temps τ_n **assez long** avant de le visiter.
- En effet, si τ_n est trop court, le marcheur n'a pas le temps de parcourir tout le domaine visité: il reste près de x_n , et x_{n+1} est alors **du même signe que** x_n .
- Il faut donc que $\tau_n \gtrsim n^{1/d_w}$, le temps typique pour traverser le domaine visité.

Preuve de l'universalité du scaling en $1/n$

- **Idée clé :** Si le marcheur *flip* au $(n+1)$ -ème site visité x_{n+1} , après x_n , c'est qu'il a attendu un temps τ_n **assez long** avant de le visiter.
- En effet, si τ_n est trop court, le marcheur n'a pas le temps de parcourir tout le domaine visité: il reste près de x_n , et x_{n+1} est alors **du même signe que** x_n .
- Il faut donc que $\tau_n \gtrsim n^{1/d_w}$, le temps typique pour traverser le domaine visité.
- Ce temps est distribué comme [Régnier et al.] :

$$\mathbb{P}(\tau_n = \tau) \sim \frac{1}{n^{1+1/d_w}} \psi\left(\frac{\tau}{n^{1/d_w}}\right)$$

Preuve de l'universalité du scaling en $1/n$

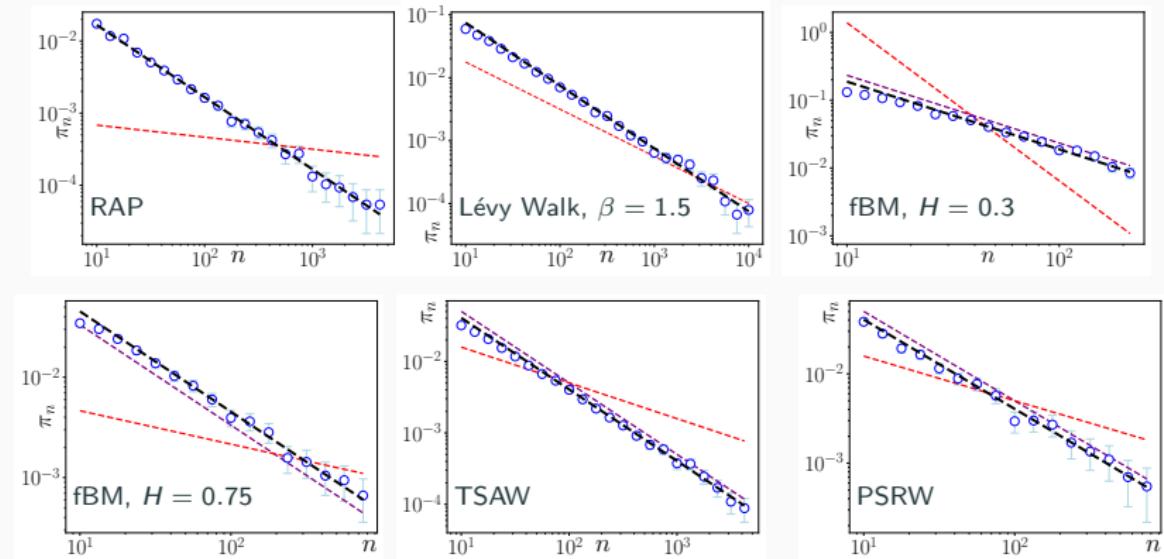
- **Idée clé :** Si le marcheur *flip* au $(n+1)$ -ème site visité x_{n+1} , après x_n , c'est qu'il a attendu un temps τ_n **assez long** avant de le visiter.
- En effet, si τ_n est trop court, le marcheur n'a pas le temps de parcourir tout le domaine visité: il reste près de x_n , et x_{n+1} est alors **du même signe que** x_n .
- Il faut donc que $\tau_n \gtrsim n^{1/d_w}$, le temps typique pour traverser le domaine visité.
- Ce temps est distribué comme [Régnier et al.] :

$$\mathbb{P}(\tau_n = \tau) \sim \frac{1}{n^{1+1/d_w}} \psi\left(\frac{\tau}{n^{1/d_w}}\right)$$

- D'où la compensation **universelle** entre les exposants:

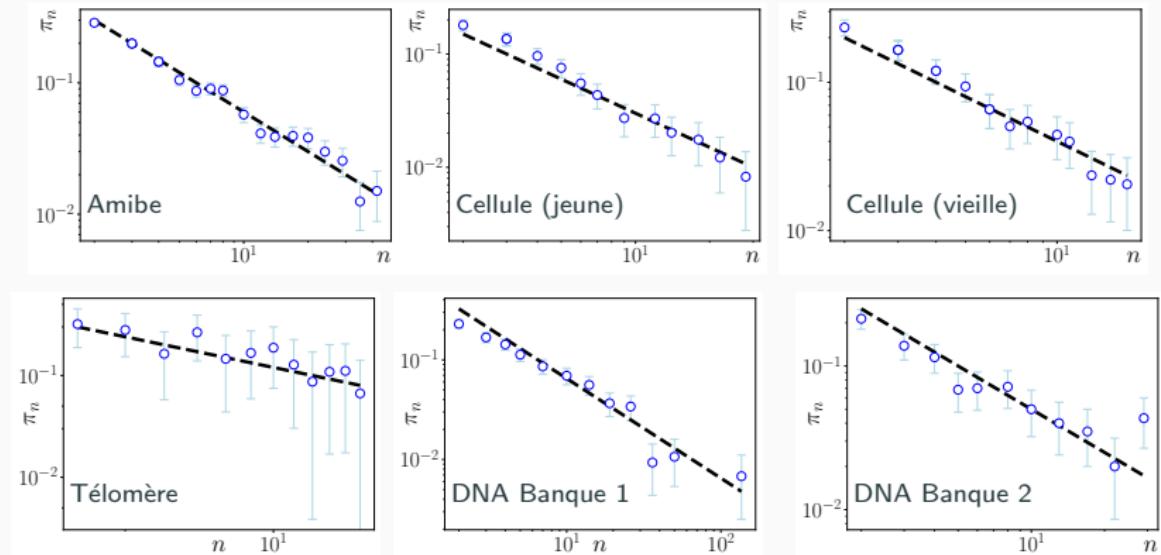
$$\boxed{\pi_n \propto \int_{n^{1/d_w}}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_n = \tau) d\tau \sim \frac{A}{n}}$$

Confirmation sur des modèles non-markoviens paradigmatisques

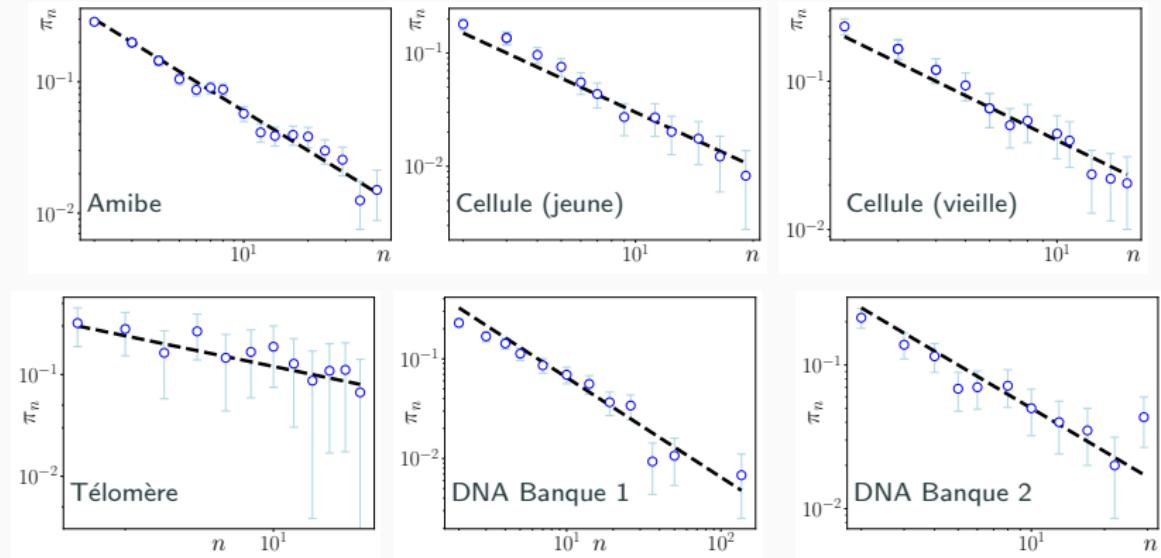


En noir : Comportement en $1/n$ universel. **En rouge** : Comportement de la probabilité de splitting classique **non-universelle** $Q \propto n^{-d_w\theta}$.

Confirmation sur données réelles : traceurs biologiques et ADN

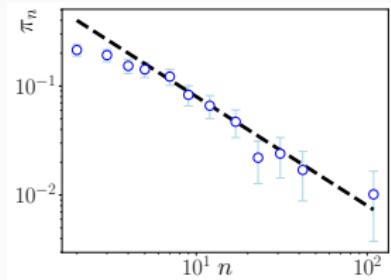


Confirmation sur données réelles : traceurs biologiques et ADN

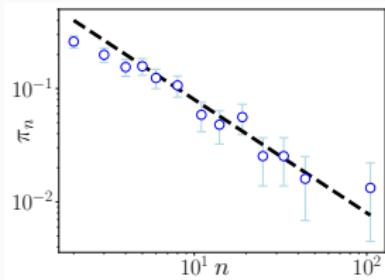


La relation $\pi_n \propto 1/n$ est toujours vérifiée, sans même avoir besoin de modéliser le processus ou son type de mémoire.

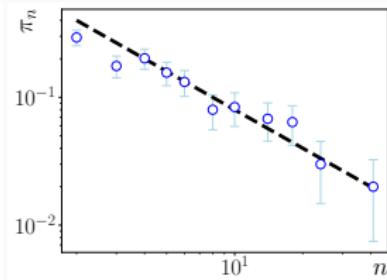
Confirmation sur données réelles : indices boursiers



(a) S&P 500

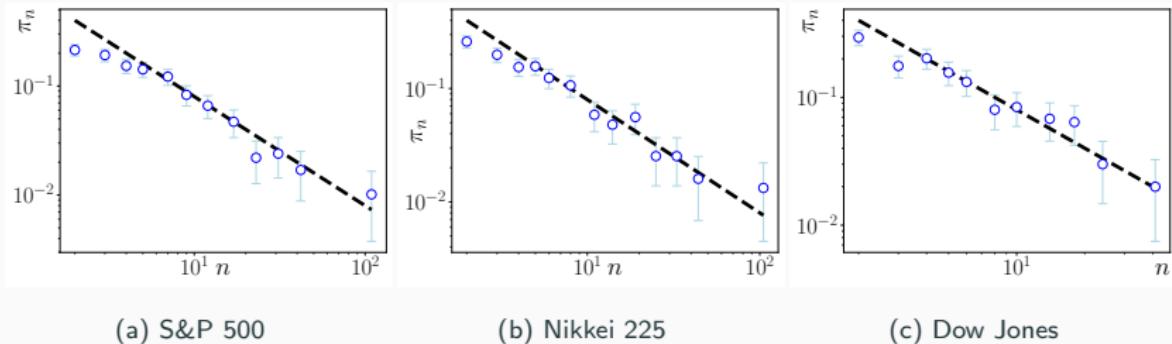


(b) Nikkei 225



(c) Dow Jones

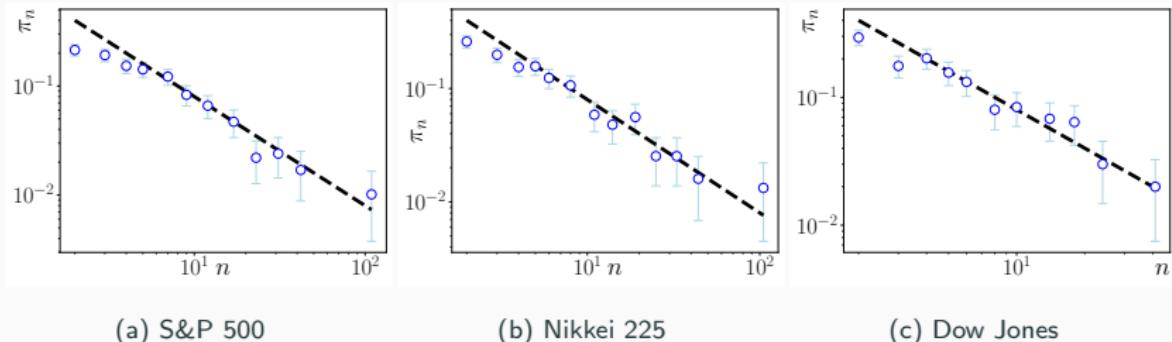
Confirmation sur données réelles : indices boursiers



Observable robuste pour estimer la tendance directionnelle (housse vs. baisse) d'un indice boursier.

Tous les indices présentent **un même préfacteur** $A \approx 0,8$: reflet de l'économie mondiale ?

Confirmation sur données réelles : indices boursiers



Observable robuste pour estimer la tendance directionnelle (hausse vs. baisse) d'un indice boursier.

Tous les indices présentent **un même préfacteur** $A \approx 0,8$: reflet de l'économie mondiale ?

Cette décroissance en $1/n$ est valide sur une plage d'exemples **incroyablement variée (biologie, finance, ...), sans inférence du modèle, et sans fit**. Elle reflète donc une **loi statistique universelle**.

Le préfacteur A

- La décroissance universelle $\pi_n \sim A/n$ ne dépend pas du processus, mais le **préfacteur A** , lui, **caractérise sa mémoire**.

Le préfacteur A

- La décroissance universelle $\pi_n \sim A/n$ ne dépend pas du processus, mais le **préfacteur A** , lui, **caractérise sa mémoire**.
- Dans la classe des processus pour lesquels les flips sont **indépendants**, on peut calculer A exactement :

$$A = d_w \theta.$$

Le préfacteur A

- La décroissance universelle $\pi_n \sim A/n$ ne dépend pas du processus, mais le **préfacteur A** , lui, **caractérise sa mémoire**.
- Dans la classe des processus pour lesquels les flips sont **indépendants**, on peut calculer A exactement :

$$A = d_w \theta.$$

- Cette classe inclut de nombreux processus non-markoviens importants, ceux qui **perdent la mémoire après un flip** : marches de Lévy, particules actives, SATW...

Le préfacteur A

- La décroissance universelle $\pi_n \sim A/n$ ne dépend pas du processus, mais le **préfacteur A** , lui, **caractérise sa mémoire**.
- Dans la classe des processus pour lesquels les flips sont **indépendants**, on peut calculer A exactement :

$$A = d_w \theta.$$

- Cette classe inclut de nombreux processus non-markoviens importants, ceux qui **perdent la mémoire après un flip** : marches de Lévy, particules actives, SATW...
- Mais si les flips sont **corrélés**, peut-on encore accéder à A ? Et ainsi quantifier **exactement** la persistance dans l'exploration ?

Le préfacteur A

- La décroissance universelle $\pi_n \sim A/n$ ne dépend pas du processus, mais le **préfacteur A** , lui, **caractérise sa mémoire**.
- Dans la classe des processus pour lesquels les flips sont **indépendants**, on peut calculer A exactement :

$$A = d_w \theta.$$

- Cette classe inclut de nombreux processus non-markoviens importants, ceux qui **perdent la mémoire après un flip** : marches de Lévy, particules actives, SATW...
- Mais si les flips sont **corrélés**, peut-on encore accéder à A ? Et ainsi quantifier **exactement** la persistance dans l'exploration ?

Réponse : Oui ! On peut calculer la valeur **exacte** du préfacteur dans de nombreux cas non triviaux.

Le préfacteur A

- La décroissance universelle $\pi_n \sim A/n$ ne dépend pas du processus, mais le **préfacteur A** , lui, **caractérise sa mémoire**.
- Dans la classe des processus pour lesquels les flips sont **indépendants**, on peut calculer A exactement :

$$A = d_w \theta.$$

- Cette classe inclut de nombreux processus non-markoviens importants, ceux qui **perdent la mémoire après un flip** : marches de Lévy, particules actives, SATW...
- Mais si les flips sont **corrélés**, peut-on encore accéder à A ? Et ainsi quantifier **exactement** la persistance dans l'exploration ?

Réponse : Oui ! On peut calculer la valeur **exacte** du préfacteur dans de nombreux cas non triviaux. Mais contrairement à l'argument de scaling, les calculs sont **techniques et spécifiques au type de mémoire présent dans le processus**.

Préfacteur A pour les SIRWs (1/5)

Pour calculer la probabilité de flip π_n d'une marche auto-interagissante, il faut connaître :

1. Le profil de temps local d'arête $(L_{T_{x_n}}(x))_x$, au moment où le marcheur visite son n -ième site x_n ;

Préfacteur A pour les SIRWs (1/5)

Pour calculer la probabilité de flip π_n d'une marche auto-interagissante, il faut connaître :

1. Le profil de temps local d'arête $(L_{T_{x_n}}(x))_x$, au moment où le marcheur visite son n -ième site x_n ;
2. L'influence de ce profil initial sur la probabilité que le prochain site visité x_{n+1} soit d'un signe **opposé** à x_n .

Préfacteur A pour les SIRWs (1/5)

Pour calculer la probabilité de flip π_n d'une marche auto-interagissante, il faut connaître :

1. Le profil de temps local d'arête $(L_{T_{x_n}}(x))_x$, au moment où le marcheur visite son n -ième site x_n ;
2. L'influence de ce profil initial sur la probabilité que le prochain site visité x_{n+1} soit d'un signe **opposé** à x_n .

On se concentre sur la TSAW, pour laquelle $(L_{T_{x_n}}(x))_x$ est connu : c'est un **mouvement brownien** à grande échelle [Tóth, Werner].

Préfacteur A pour les SIRWs (2/5)

On calcule la probabilité jointe $A_+(z) dz$ que :

1. Le domaine exploré soit $[-(1 - z), z]$, avec z le dernier site visité ;

Préfacteur A pour les SIRWs (2/5)

On calcule la probabilité jointe $A_+(z) dz$ que :

1. Le domaine exploré soit $[-(1 - z), z]$, avec z le dernier site visité ;
2. Le prochain site visité soit $-(1 - z) - dz$ (flip).

Préfacteur A pour les SIRWs (2/5)

On calcule la probabilité jointe $A_+(z) dz$ que :

1. Le domaine exploré soit $[-(1 - z), z]$, avec z le dernier site visité ;
2. Le prochain site visité soit $-(1 - z) - dz$ (flip).

Alors, le préfacteur total s'écrit :

$$A = 2 \int_0^1 A_+(z) dz.$$

Préfacteur A pour les SIRWs (2/5)

On calcule la probabilité jointe $A_+(z) dz$ que :

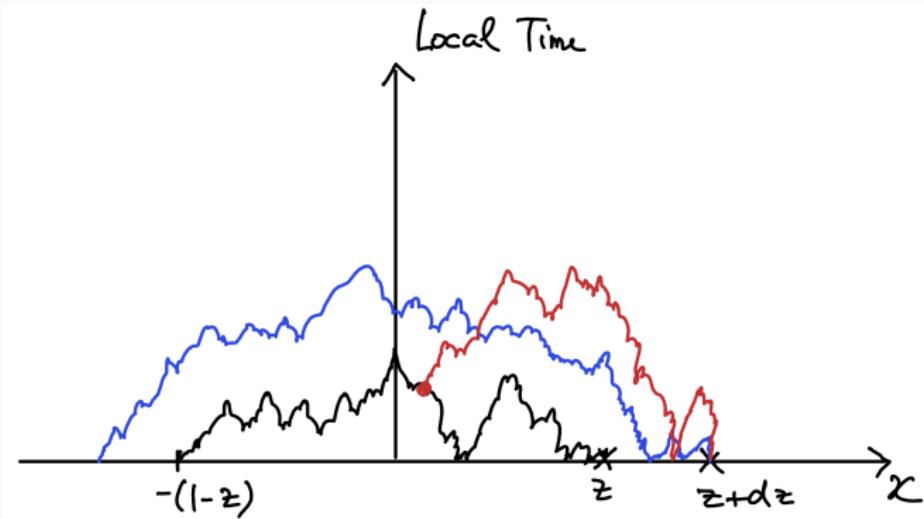
1. Le domaine exploré soit $[-(1 - z), z]$, avec z le dernier site visité ;
2. Le prochain site visité soit $-(1 - z) - dz$ (flip).

Alors, le préfacteur total s'écrit :

$$A = 2 \int_0^1 A_+(z) dz.$$

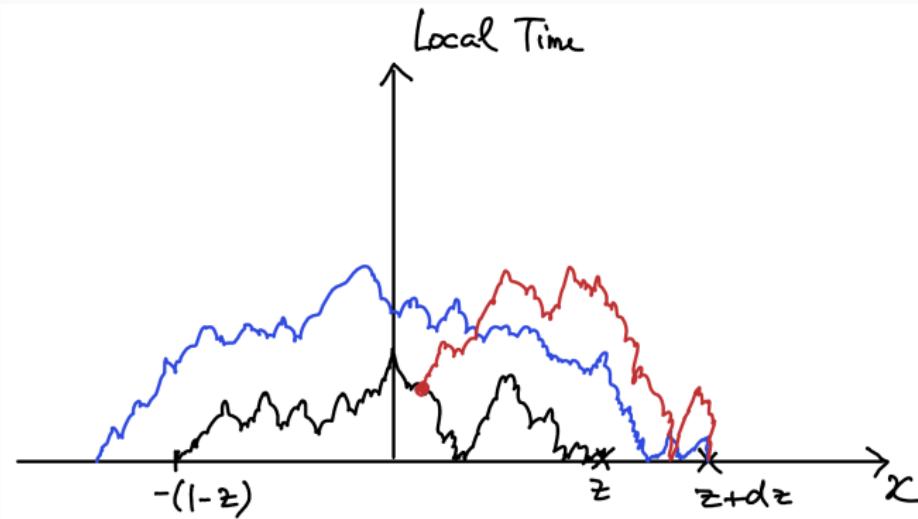
Objectif : exprimer $A_+(z)$ à l'aide du temps local d'arête.

Préfacteur A pour les SIRWs (3/5)



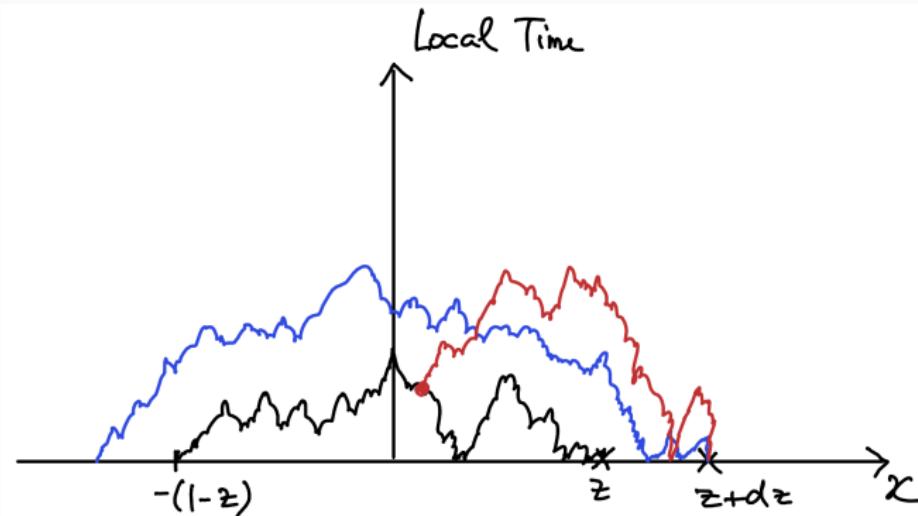
Noir : profil initial du temps local d'arête à la visite de $[-(1-z), z]$ en terminant en z .

Préfacteur A pour les SIRWs (3/5)



Noir : profil initial du temps local d'arête à la visite de $[-(1 - z), z]$ en terminant en z . **Rouge** : profil typique à la visite de $z + dz$ sans flip.

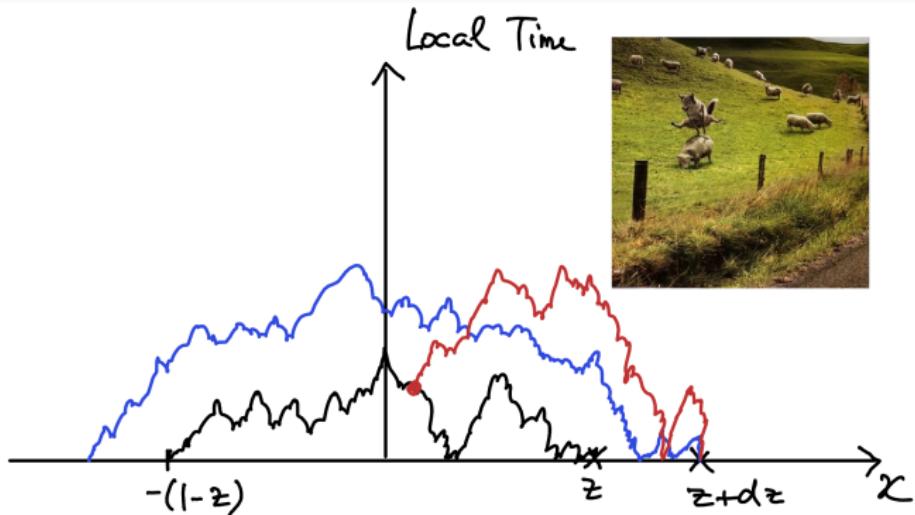
Préfacteur A pour les SIRWs (3/5)



Noir : profil initial du temps local d'arête à la visite de $[-(1 - z), z]$ en terminant en z . **Rouge** : profil typique à la visite de $z + dz$ **sans flip**.

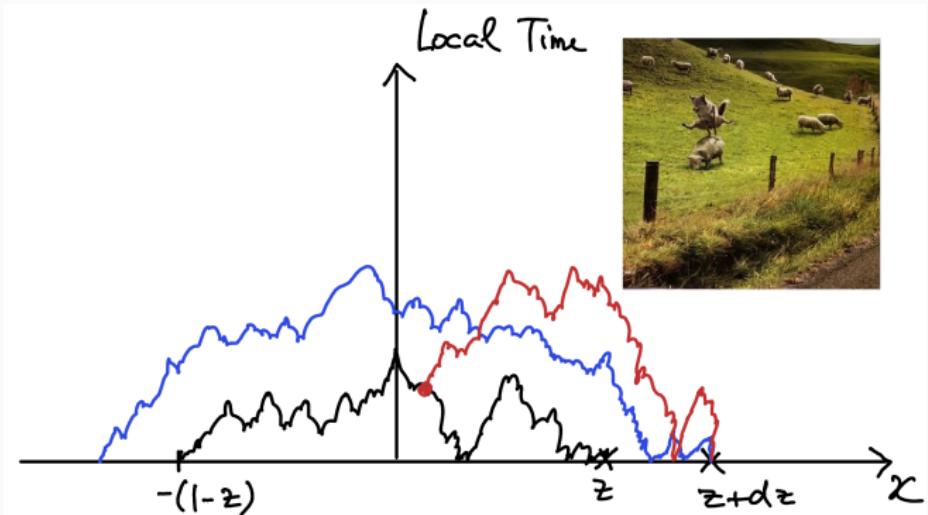
Bleu : profil typique à la visite de $z + dz$ **avec flip**.

Préfacteur A pour les SIRWs (4/5)



$A_+(z)$ est la probabilité que le processus bleu reste au-dessus du noir : **un mouvement brownien qui 'sauve' au-dessus d'un autre brownien.**

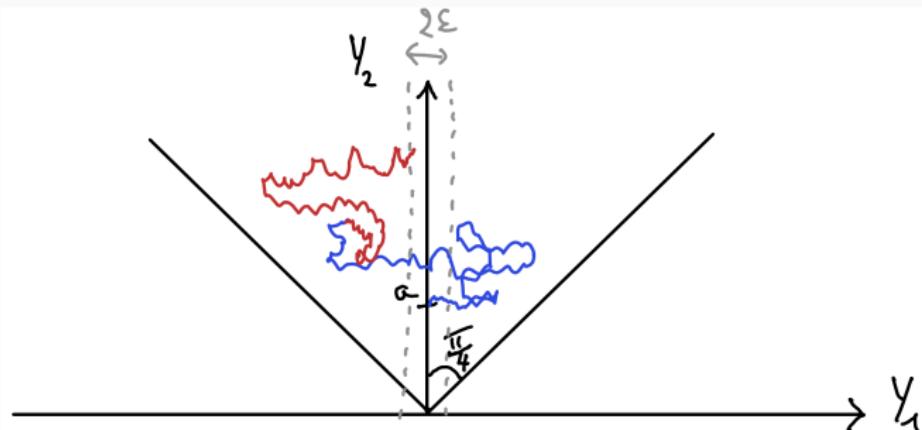
Préfacteur A pour les SIRWs (4/5)



$A_+(z)$ est la probabilité que le processus bleu reste au-dessus du noir : **un mouvement brownien qui 'sauté' au-dessus d'un autre brownien.**

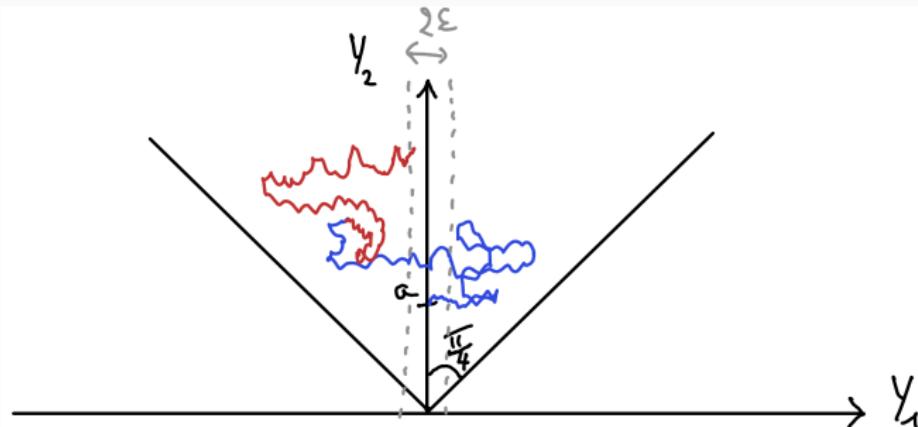
Difficulté : le brownien noir part de 0 au 'temps' z , est réfléchi en 0 jusqu'au temps 0, et n'est absorbé en 0 qu'au 'temps' $-(1 - z)$...

Calcul de la probabilité de 'saute-mouton' (5/5)



On considère les deux browniens 1D comme un **seul mouvement brownien 2D** (Y_1, Y_2).

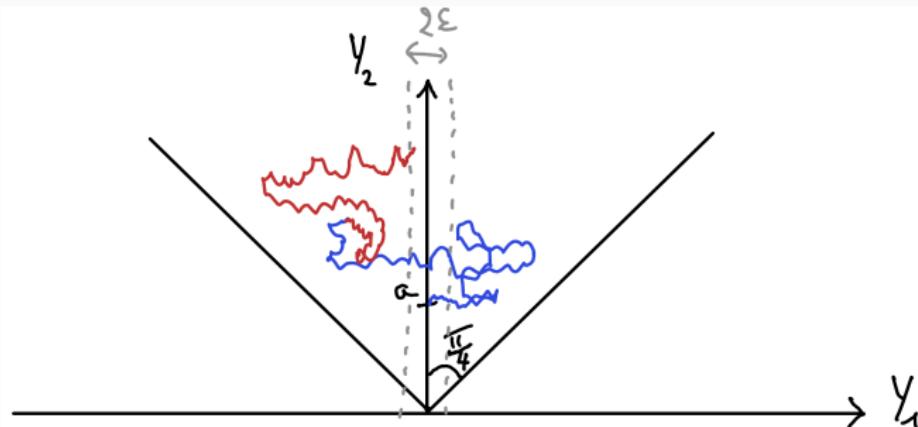
Calcul de la probabilité de ‘saute-mouton’ (5/5)



On considère les deux browniens 1D comme un **seul mouvement brownien 2D** (Y_1, Y_2).

- Durée z : mouvement dans un **quart de plan absorbant**.

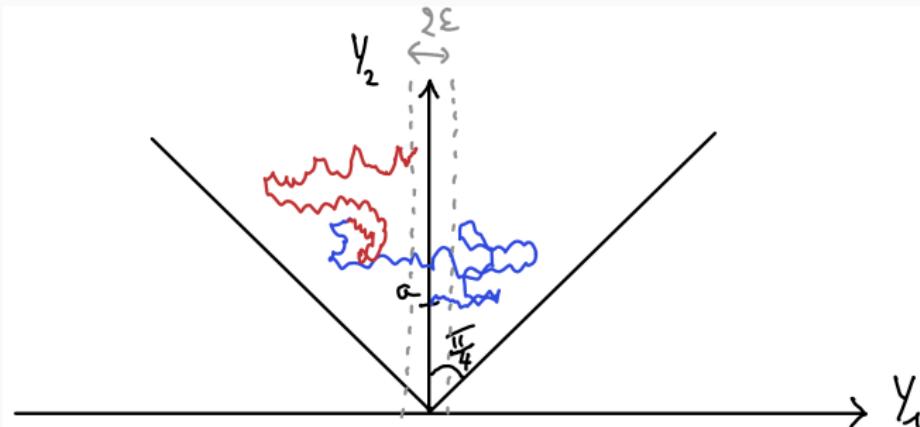
Calcul de la probabilité de ‘saute-mouton’ (5/5)



On considère les deux browniens 1D comme un **seul mouvement brownien 2D** (Y_1, Y_2).

- Durée z : mouvement dans un **quart de plan absorbant**.
- Durée $1 - z$: mouvement dans un **huitième de plan absorbant**.

Calcul de la probabilité de ‘saute-mouton’ (5/5)



On considère les deux browniens 1D comme un **seul mouvement brownien 2D** (Y_1, Y_2).

- Durée z : mouvement dans un **quart de plan absorbant**.
- Durée $1 - z$: mouvement dans un **huitième de plan absorbant**.

On compte les trajectoires **non-absorbées** dans ces géométries $\Rightarrow A_+(z)$.

Résultat final

On obtient après de longs calculs :

$$A = \frac{4}{\pi^2}.$$

Résultat final

On obtient après de longs calculs :

$$A = \frac{4}{\pi^2}.$$

Ce résultat diffère du cas de flips indépendants (qui donne $A = d_w \theta = 1/2$). Les flips sont ici **corrélés**, ce qui modifie A de manière **non triviale, mais calculable**.

Résultat final

On obtient après de longs calculs :

$$A = \frac{4}{\pi^2}.$$

Ce résultat diffère du cas de flips indépendants (qui donne $A = d_w \theta = 1/2$). Les flips sont ici **corrélés**, ce qui modifie A de manière **non triviale, mais calculable**.

Ce résultat est valable pour **toutes les marches auto-répulsives qui ne saturent pas** (TSAW, PSRW, SESRW...).

Résultat final

On obtient après de longs calculs :

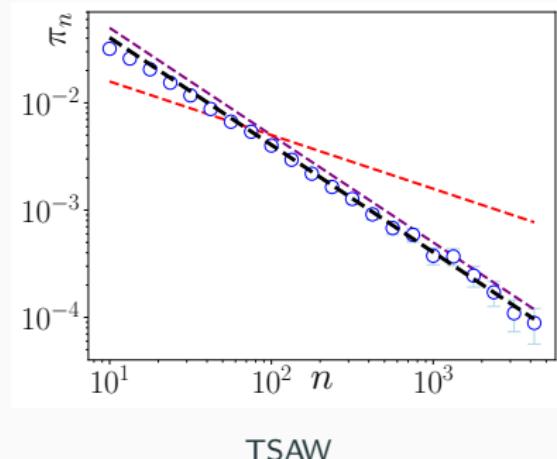
$$A = \frac{4}{\pi^2}.$$

Ce résultat diffère du cas de flips indépendants (qui donne $A = d_w \theta = 1/2$). Les flips sont ici **corrélés**, ce qui modifie A de manière **non triviale, mais calculable**.

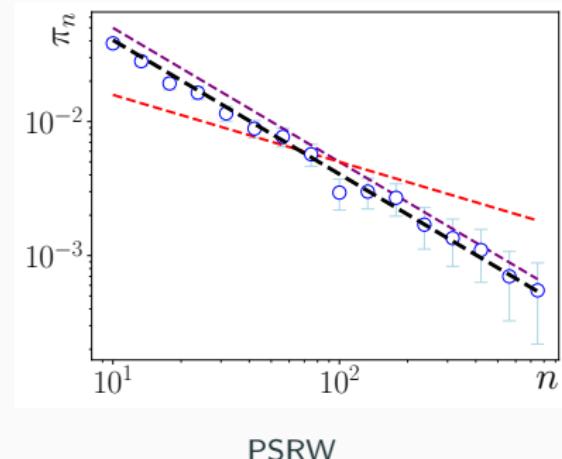
Ce résultat est valable pour **toutes les marches auto-répulsives qui ne saturent pas** (TSAW, PSRW, SESRW...).

À notre connaissance, l'expression $\pi_n = \frac{4}{n\pi^2}$ constitue le **premier résultat exact pour une observable vieillie dans le cadre des SIRWs**.

Confirmation numérique : cas des SIRWs



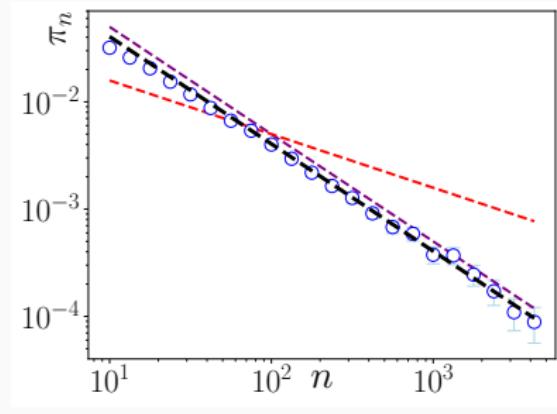
TSAW



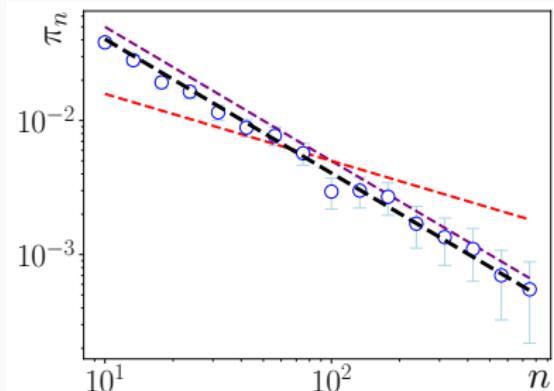
PSRW

On retrouve exactement $A = \frac{4}{\pi^2}$!

Confirmation numérique : cas des SIRWs



TSAW



PSRW

On retrouve exactement $A = \frac{4}{\pi^2}$!

Le calcul de A peut être mené dans d'autres cas, en utilisant des outils adaptés au processus en question.

Confirmation numérique : cas du fBM

Pour ce processus **gaussien non-markovien**, nous avons utilisé des outils de **théorie des champs** [Wiese] pour calculer perturbativement:

$$A = 1 - 4 \left(12 \log(\mathcal{G}) - \gamma - \frac{7}{3} \log(2) \right) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

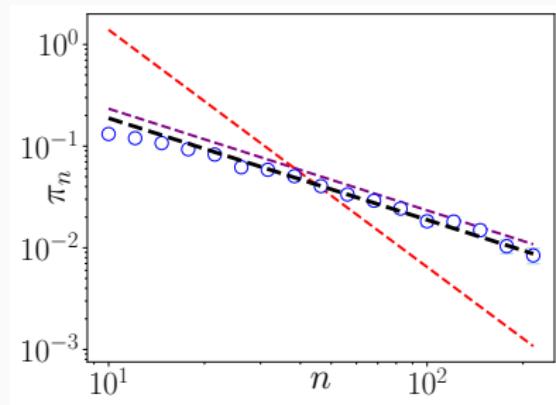
où $\varepsilon = d_w^{-1} - \frac{1}{2}$ quantifie l'**écart à la markovianité**.

Confirmation numérique : cas du fBM

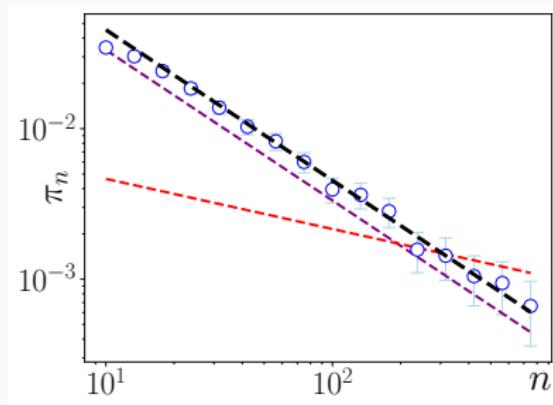
Pour ce processus **gaussien non-markovien**, nous avons utilisé des outils de **théorie des champs** [Wiese] pour calculer perturbativement:

$$A = 1 - 4 \left(12 \log(\mathcal{G}) - \gamma - \frac{7}{3} \log(2) \right) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

où $\varepsilon = d_w^{-1} - \frac{1}{2}$ quantifie l'**écart à la markovianité**.



fBM antipersistent, $d_w = 3$



fBM persistent, $d_w = \frac{4}{3}$

Conclusion

- Nous avons introduit une observable clé : la **probabilité de flip**, mesurant la **persistence directionnelle** dans l'exploration.

Conclusion

- Nous avons introduit une observable clé : la **probabilité de flip**, mesurant la **persistence directionnelle** dans l'exploration.
- Elle constitue une **brique élémentaire** pour décrire l'exploration de processus à mémoire.

Conclusion

- Nous avons introduit une observable clé : la **probabilité de flip**, mesurant la **persistent directionnelle** dans l'exploration.
- Elle constitue une **brique élémentaire** pour décrire l'exploration de processus à mémoire.
- Sa décroissance universelle $\pi_n \sim A/n$ s'observe **quelle que soit la nature du processus**.

Conclusion

- Nous avons introduit une observable clé : la **probabilité de flip**, mesurant la **persistante directionnelle** dans l'exploration.
- Elle constitue une **brique élémentaire** pour décrire l'exploration de processus à mémoire.
- Sa décroissance universelle $\pi_n \sim A/n$ s'observe **quelle que soit la nature du processus**.
- Cette universalité est rare et précieuse dans le cadre non-markovien, où peu de résultats analytiques sont accessibles.

Conclusion

- Nous avons introduit une observable clé : la **probabilité de flip**, mesurant la **persistante directionnelle** dans l'exploration.
- Elle constitue une **brique élémentaire** pour décrire l'exploration de processus à mémoire.
- Sa décroissance universelle $\pi_n \sim A/n$ s'observe **quelle que soit la nature du processus**.
- Cette universalité est rare et précieuse dans le cadre non-markovien, où peu de résultats analytiques sont accessibles.
- Le calcul du préfacteur A , bien que technique et difficile, **peut être mené à bien pour plusieurs classes de processus**.
- Le formalisme peut être généralisé à $d > 1$, ou à un conditionnement plus riche sur l'histoire du processus.

Conclusion générale

Conclusion générale

- Nous avons exploré comment la mémoire, locale ou globale, **transforme profondément l'exploration** d'un processus stochastique.

Conclusion générale

- Nous avons exploré comment la mémoire, locale ou globale, **transforme profondément l'exploration** d'un processus stochastique.
- Des méthodes analytiques poussées nous ont permis d'obtenir des résultats **exacts** — une rareté dans le cadre non-markovien.

Conclusion générale

- Nous avons exploré comment la mémoire, locale ou globale, **transforme profondément l'exploration** d'un processus stochastique.
- Des méthodes analytiques poussées nous ont permis d'obtenir des résultats **exacts** — une rareté dans le cadre non-markovien.
- Au-delà des modèles spécifiques, nous avons introduit une observable simple mais puissante : la probabilité de **flip**, dont la décroissance **universelle** révèle un comportement robuste à travers les types de mémoire.

Conclusion générale

- Nous avons exploré comment la mémoire, locale ou globale, **transforme profondément l'exploration** d'un processus stochastique.
- Des méthodes analytiques poussées nous ont permis d'obtenir des résultats **exacts** — une rareté dans le cadre non-markovien.
- Au-delà des modèles spécifiques, nous avons introduit une observable simple mais puissante : la probabilité de **flip**, dont la décroissance **universelle** révèle un comportement robuste à travers les types de mémoire.
- Ces résultats suggèrent l'existence d'une géométrie émergente de l'exploration, façonnée par la mémoire, et potentiellement décrite par des lois universelles.

Merci pour votre attention !
