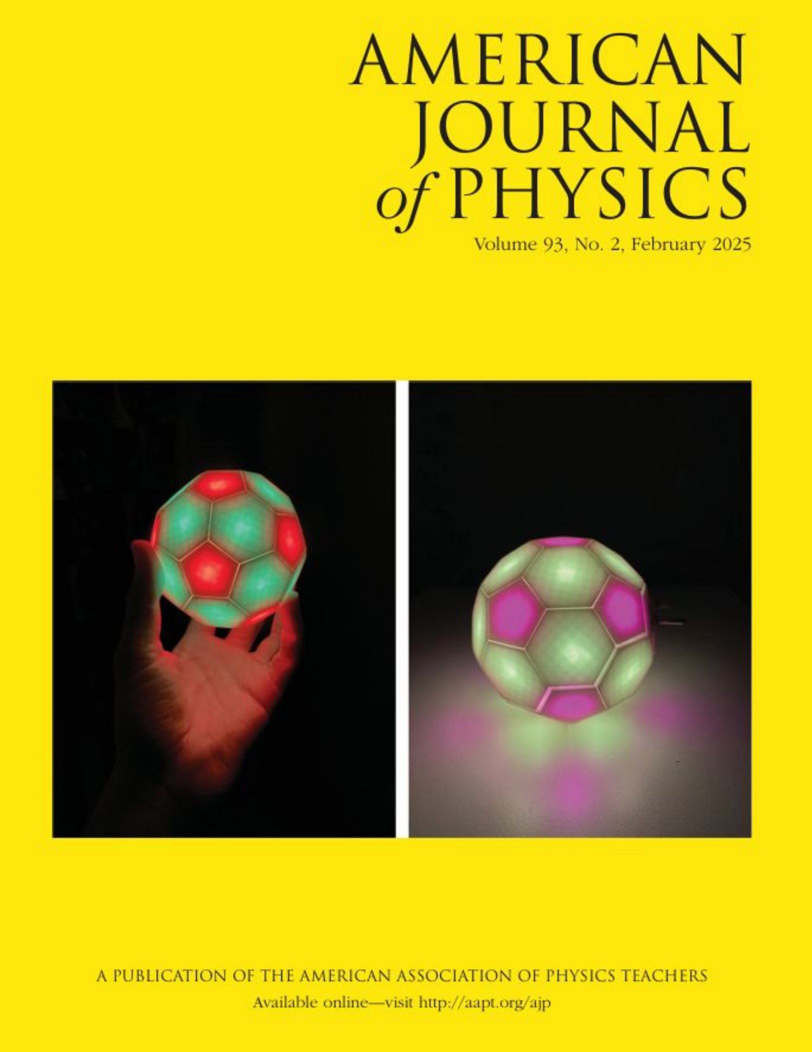
Boules à gogo & spin-statistique



Spin-statistics theorem

Feynman Lectures on Physics:
...An explanation has been worked out by Pauli from complicated arguments of QFT and relativity...but we haven't found a way of reproducing his arguments on an elementary level...this probably means that we do not have a complete understanding of the fundamental

The essential argument is that the QFT is assumed to be Lorentz invariant, and transition amplitudes need to remain properly ordered in time in all Lorentz frames:

http://hep.uchicago.edu/cdf/frisch/p363/jian_testbmr.pdf

Boules à gogo & spin-statistique

0.Intro : boule et théorème

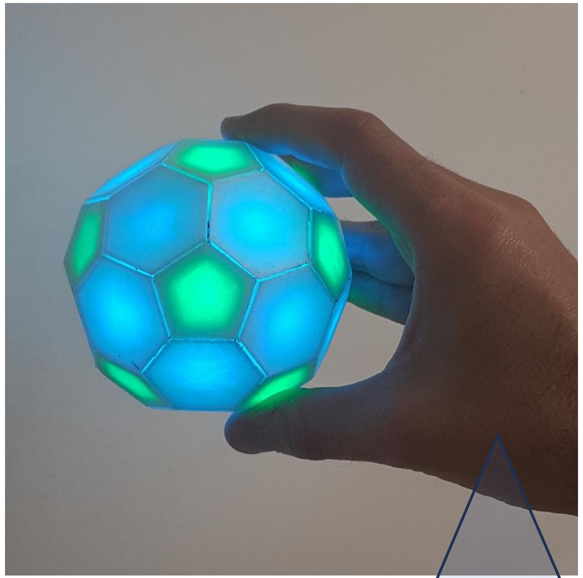
1.Les boules spinorielles

- Espace des rotations 3D et des spineurs
- Lire la boule
- Couverture Double / « détecteur d'homotopie » / Axe propre
- Les boules de spin 1 et 3/2

2.Spin-statistique

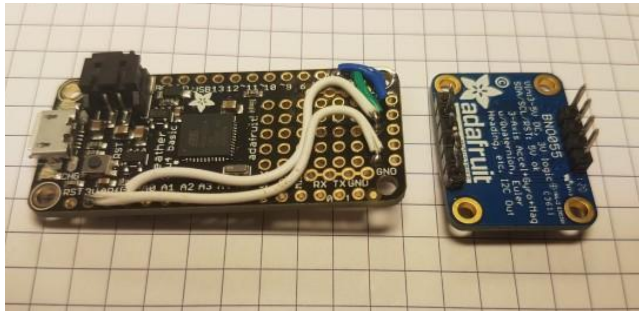
- Etat des lieux
- Cas « semi-classique »
- 2 particules de spin 1/2

0. Intro: la boule spinorielle, une gyroBalle LED



The controller board is connected to the gyroscope via its 4 pins :

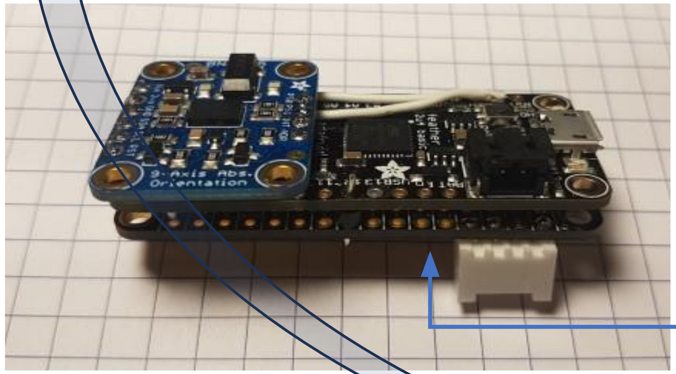
- Power
- Ground
- SCA pin 3
- SCL pin 2

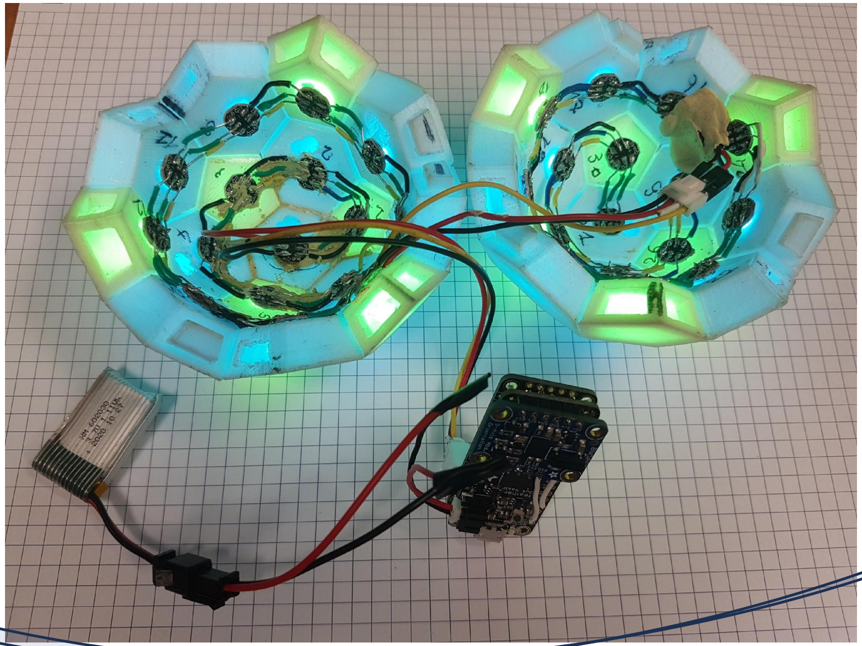


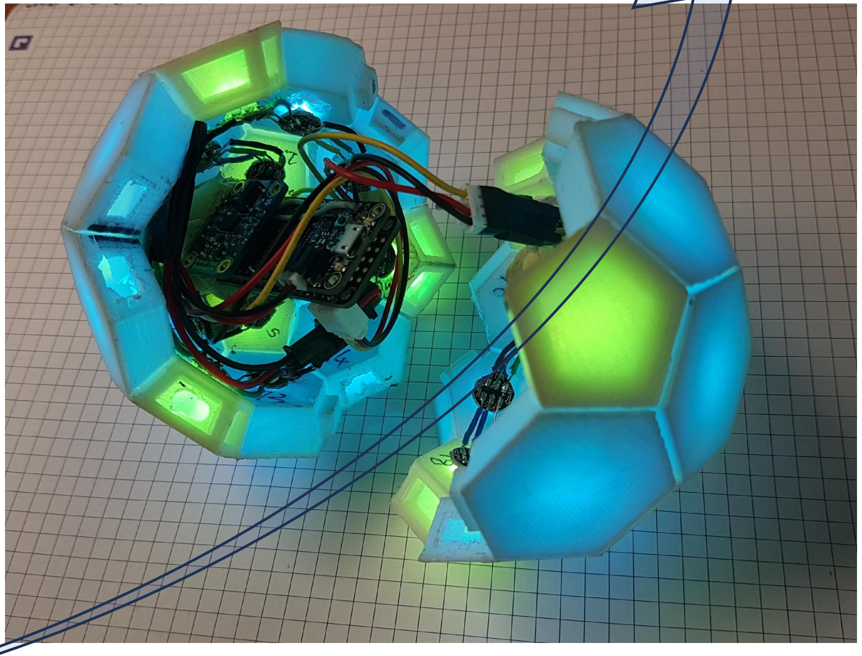
And to the LED Strip via

- Power
- Ground
- Data pin 12

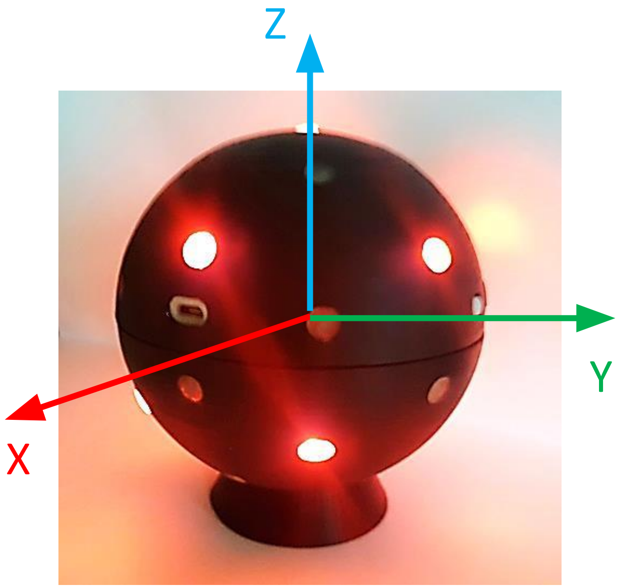
(Here an additionnal featherwing Proto board is receiving the LED strip connector)





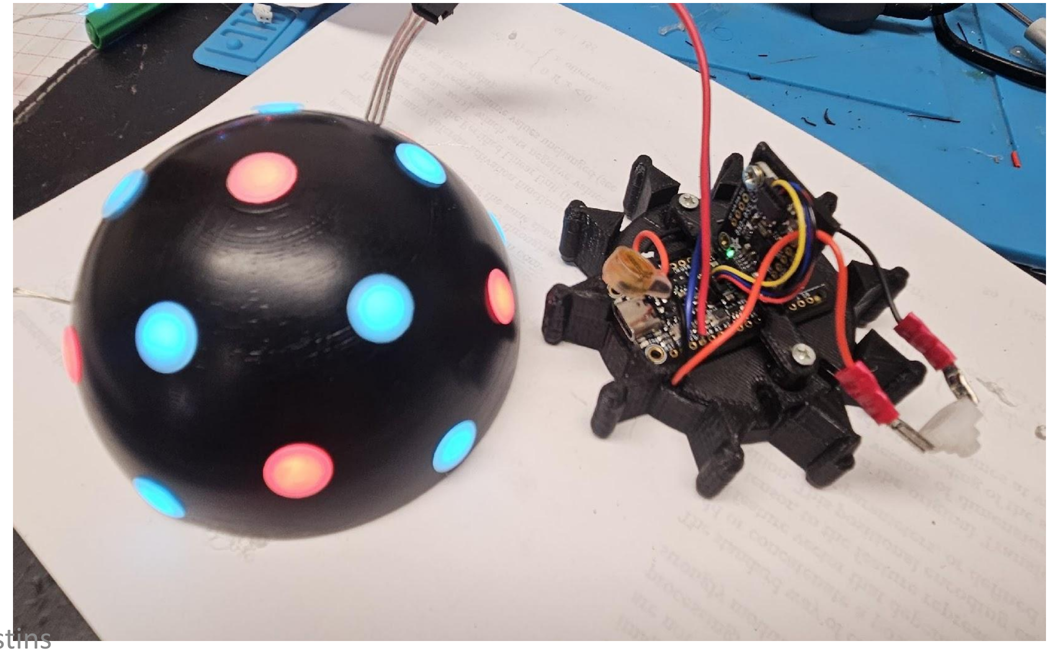


0. Intro: la boule spinorielle, une gyroBalle LED



Version 2

- ✔ Easy Build : without soldering
- ✔ Easy Print : 2 hemispherical frames only + Internal support
- ✔ Visible cartesian reference frame
- ✔ Charge connector and power switch



0. Intro: théorème spin-statistique

$\tilde{\varphi} = e^{i\phi}\varphi \qquad \tilde{\tilde{\varphi}} = \varphi = e^{2i\phi}\varphi \rightarrow \phi = \pi$ ou $2\pi \rightarrow \tilde{\varphi} = -\varphi$

ou $\tilde{\varphi} = \varphi$

Th

spin	après échange	
demi-entier	$\tilde{\varphi} = -\varphi$	fermion
entier	$\tilde{\varphi} = \varphi$	bosons

↳ 2 spin $\frac{1}{2}$ (e^-) $\quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)e^{i\varphi}$

↳ pas plus de 2 e^- dans le même état

ie principe d'exclusion de pauli

0. Intro: théorème spin-statistique & rotation

Now the spin–statistics rule that we wish to understand can be stated for both cases simultaneously by the following single rule: *The effect on the wave function of the exchange of two particles is the same as the effect of rotating the frame of one of them by 360° relative to the other's frame.* And why should this be true? Why, simply because such an exchange implies exactly such a relative frame rotation!

1986 : Dirac Memorial lecture by Feynam

RICHARD P. FEYNMAN

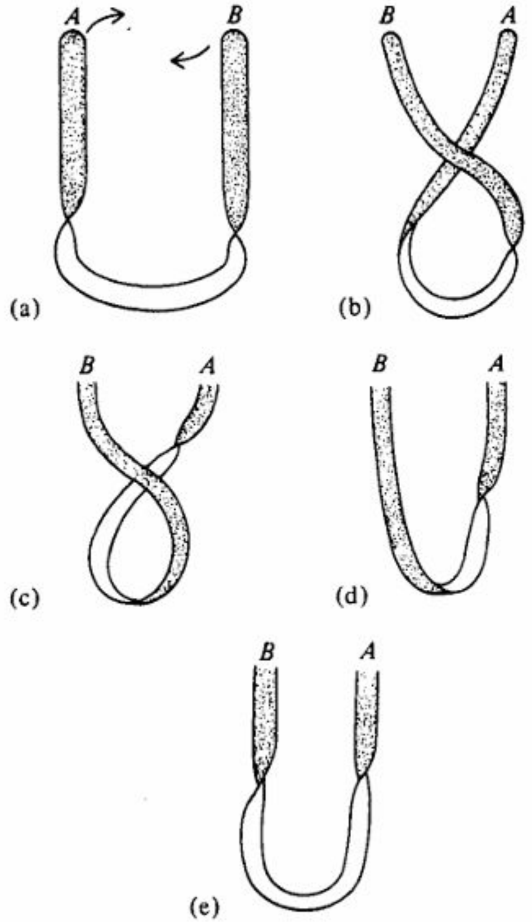


Fig. 16 In the sequence (a) to (e) the ends of the belt have been reversed in position. Note that the twist on the right-hand side in (e) comes out opposite that in (a). To restore it completely, an additional 360° turn of the right belt around the vertical would be necessary.

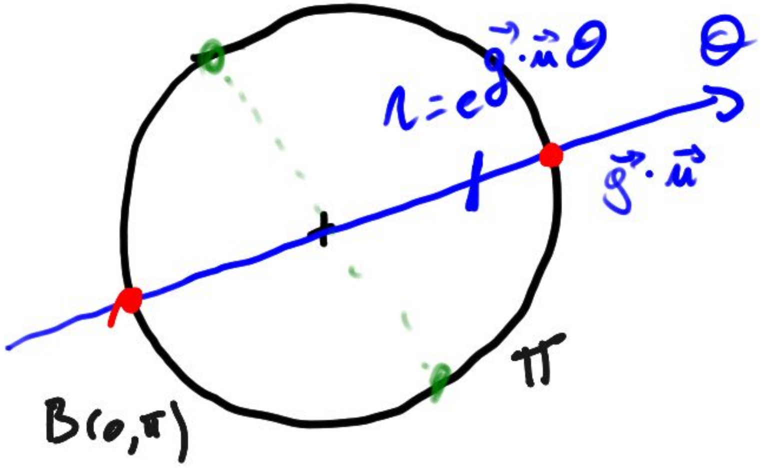
58

1. Les boules spinorielles : visualisation de SO(3)

Rotations $\vec{n}, \theta$ $\quad |\vec{n}| = 1$ $\quad R(\vec{n},\theta) \in SO(3)$

$R(\vec{n},\theta) = e^{\vec{g}\cdot\vec{n}\,\theta}$ $\quad \theta \in [-\pi\ \pi]$ $\quad$ groupe continu dim 3

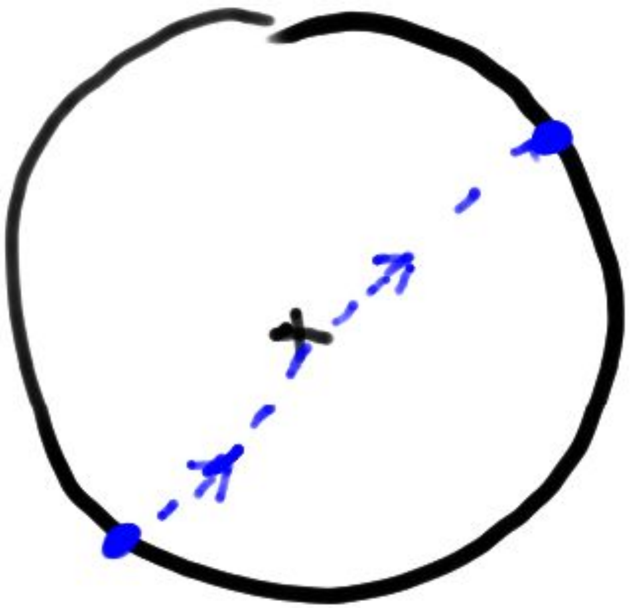
$R(\vec{n},\pi) = R(-\vec{n},\pi)$.



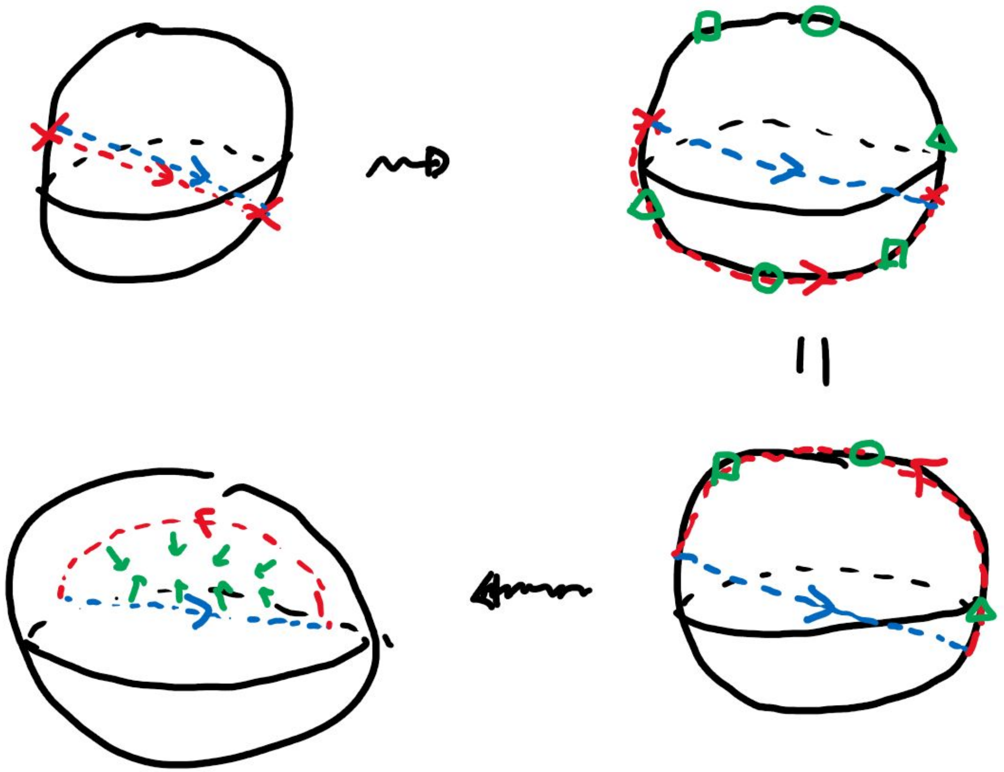
$\vec{g}$ $\quad g_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad g_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad g_z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$B(0,\pi)$ ac points opposés identifiés

1. Les boules spinorielles : SO(3) de groupe fondamental Z / 2Z



Boucle non contractible



Boucle contractible

1. Les boules spinorielles : spineurs et SU(2)

$$|\Psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle \qquad a, b \in \mathbb{C} \qquad |a|^2+|b|^2 = 1$$

Spineur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$

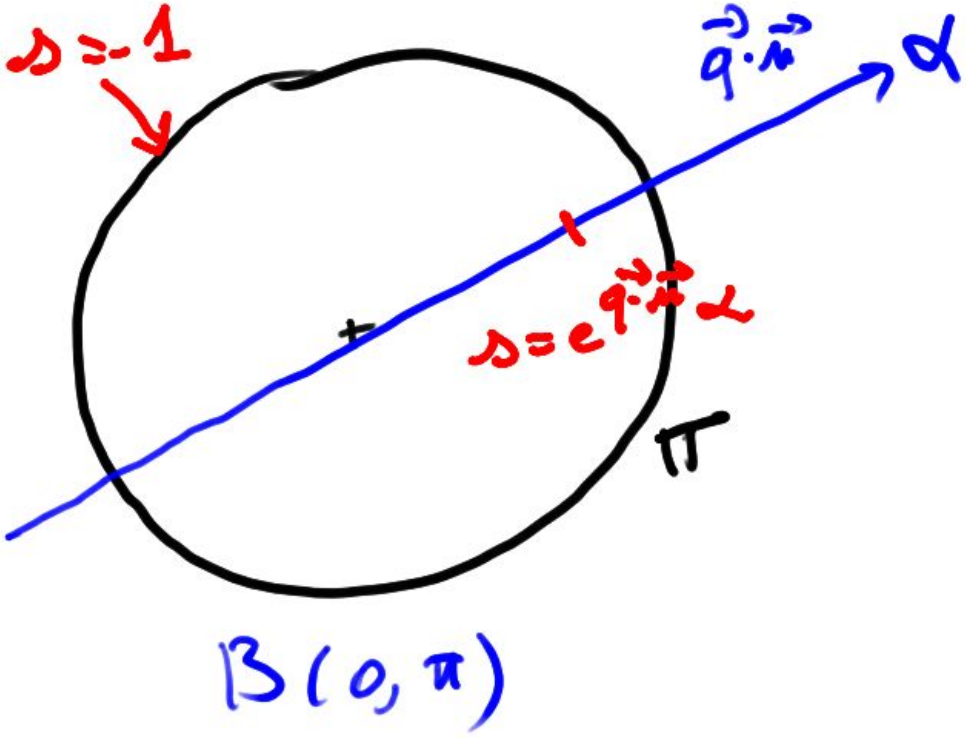
unitaire $|a|^2+|b|^2 = 1$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix} \in SU(2)$$

spineur

SU(2) groupe & variété de dim 3

1. Les boules spinorielles : visualisation de SU(2)



$$s = e^{\vec{q}\cdot\vec{n}\,\alpha} \qquad \alpha \in [0\ \pi]$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{vmatrix} \qquad |\vec{n}| = 1$$

$$\vec{q} = \begin{vmatrix} i \\ j \\ k \end{vmatrix}$$

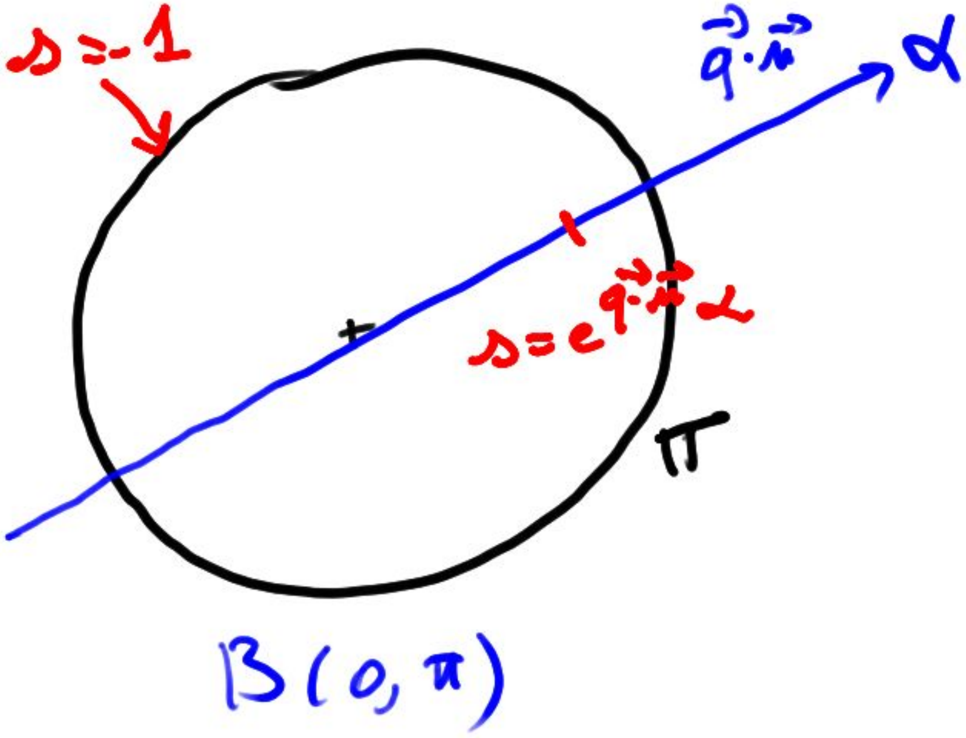
$$i = \begin{pmatrix} 0 & -h \\ -h & 0 \end{pmatrix} \quad j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} -h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

$(h^2 = -1)$

quaternions

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

1. Les boules spinorielles : visualisation de SU(2)



$$s = e^{\vec{q}\cdot\vec{m}\,\alpha} \qquad \alpha \in [0\ \pi]$$

$$\vec{m} = \begin{vmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{vmatrix} \qquad |\vec{m}| = 1$$

$$\vec{q} = \begin{vmatrix} i \\ j \\ k \end{vmatrix}$$

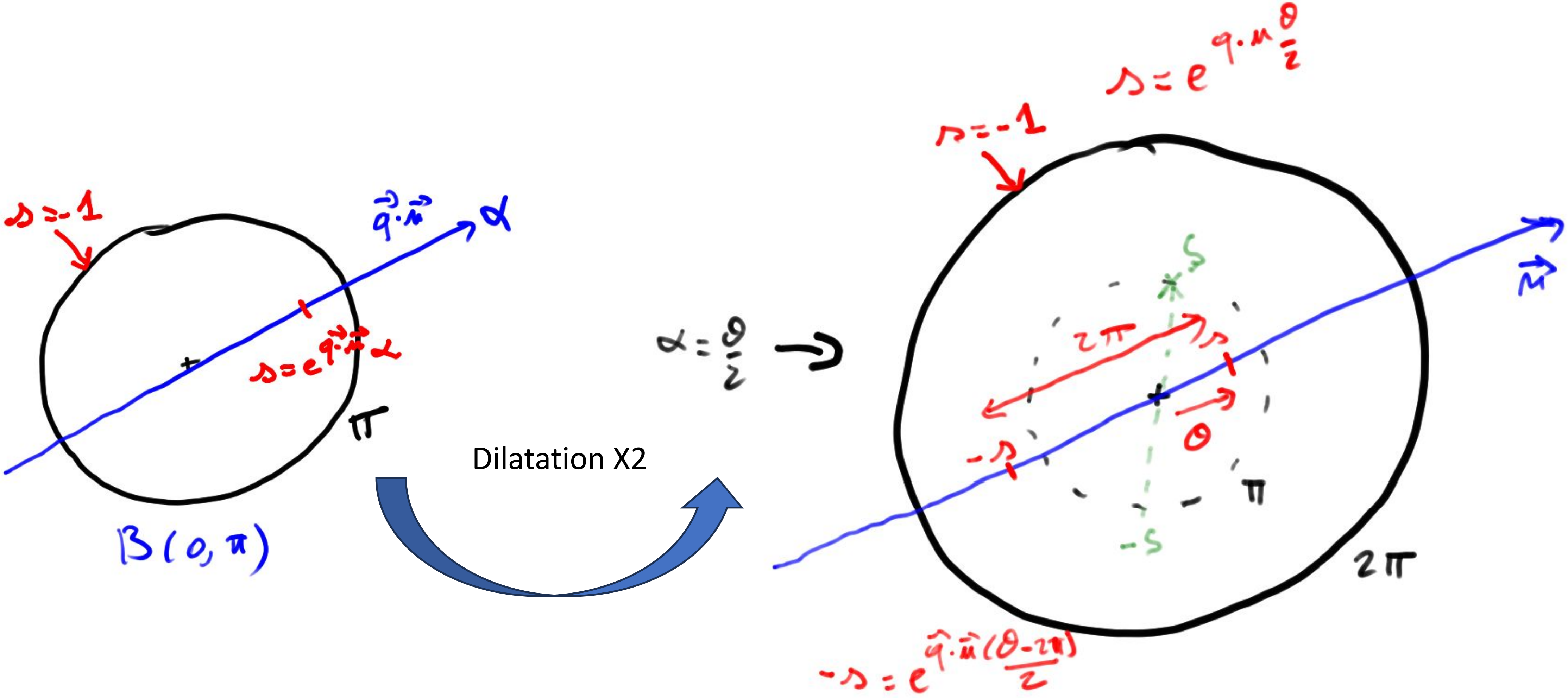
$$(\vec{q}\cdot\vec{m})^2 = -1$$

$$e^{\vec{q}\cdot\vec{m}\,\alpha} = \cos\alpha + \vec{q}\cdot\vec{m}\,\sin\alpha$$

$$(e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$\rightarrow \begin{cases} e^{\vec{q}\cdot\vec{m}\,\pi} = -1 & (e^{i\pi} = -1) \\ e^{\vec{q}\cdot\vec{m}\,\frac{\pi}{2}} = \vec{q}\cdot\vec{m} & (e^{i\frac{\pi}{2}} = i) \\ e^{\vec{q}\cdot\vec{m}\,2\pi} = 1 & \end{cases}$$

1. Les boules spinorielles : visualisation de SU(2)



1. SO(3) et SU(2) : projection de SU(2) vers SO(3)

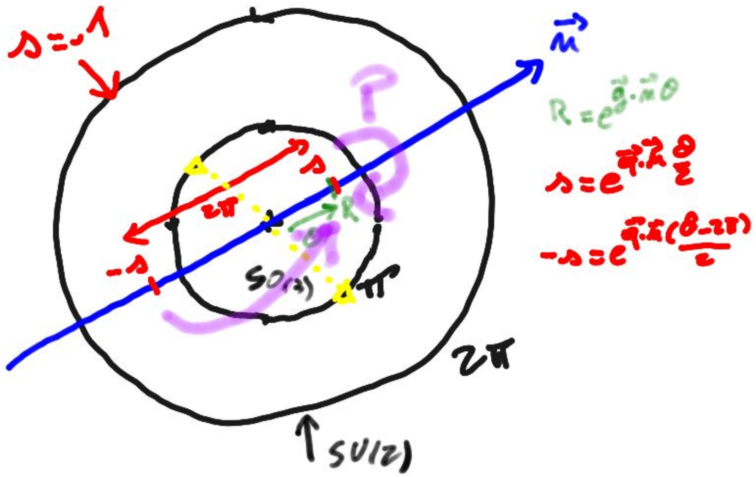
On projette un spineurs :

- Sur lui-même s'il est dans la boule de rayon pi, cad sur la rotation R
- Sur son opposé s'il est à l'extérieur, cad toujours sur R
- Si les 2 spineurs sont sur la sphère, on projette s sur la rotation correspondant aux 2 points antipodaux identifiés de la sphère de rayon PI

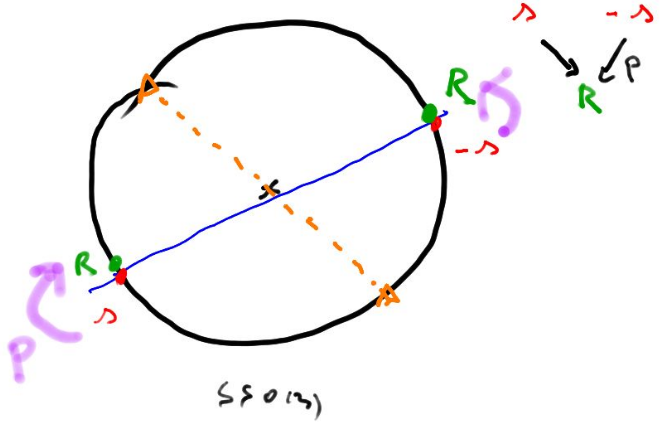
$$s = e^{q\cdot u\frac{\theta}{2}} \qquad -s = e^{q\cdot u\left(\frac{\theta-2\pi}{2}\right)}$$

$$s \xrightarrow{P} R \xleftarrow{P} -s$$

$$R = e^{q\cdot u\theta} \qquad P^{-1}(R) = \{s; -s\}$$



Sur la surface de SO(3)



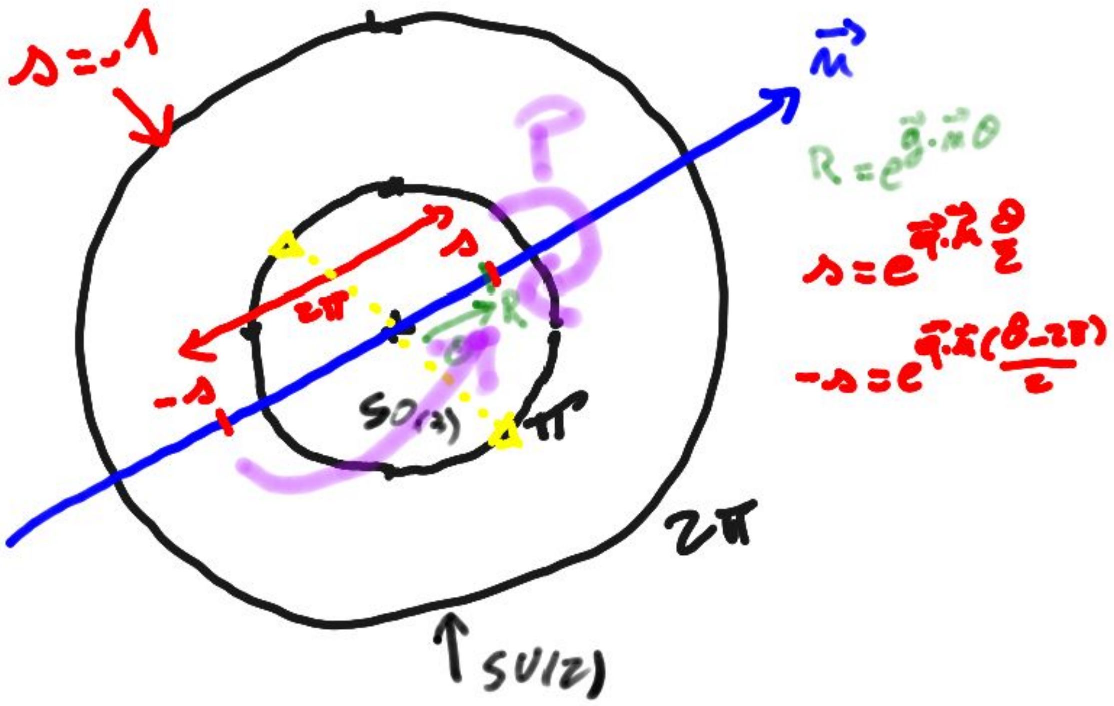
1. SO(3) et SU(2) : homomorphisme de SU(2) vers SO(3)

P définit un homomorphisme (à calculer …)

• homomorphisme

$$R(s_1 s_2) = R(s_1)\,R(s_2)$$

• $2 \to 1$ car $\rho^{-1}(R) = \{s\,;\,-s\}$



1. SO(3) et SU(2) : relèvement de chemin

P n'est pas globalement inversible, mais localement oui

Si on choisit un des antécédents s de R, on peut suivre s par continuité quand R varie. (Inversion loclae)

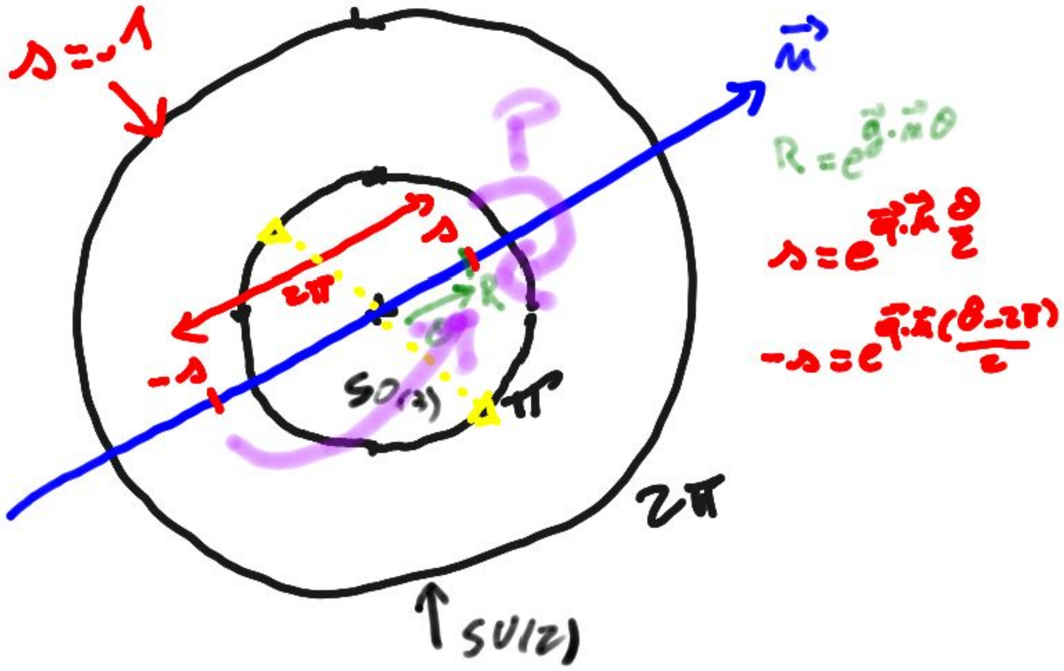
Un chemin dans SO(3) se relève en un chemin dans SU(2)

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_2 \arrow[r, hook] \arrow[dr] & SU(2) \arrow[d, "P"] \\
 & SO(3)
\end{tikzcd}
$$

fibration

$$P^{-1}(V(R)) \simeq \mathbb{Z}_2 \times V$$

mais $P^{-1}(SO(3)) \neq \mathbb{Z}_2 \times SO(3)$

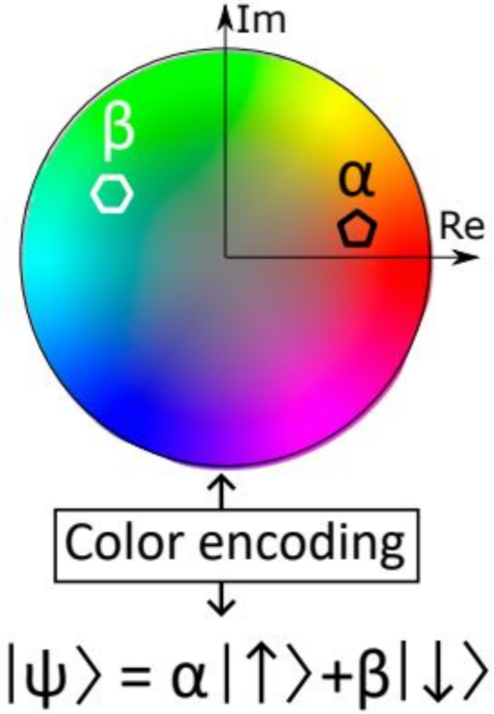


Fibration triviale

Fibration triviale

1. Les boules spinorielles : lecture de la boule

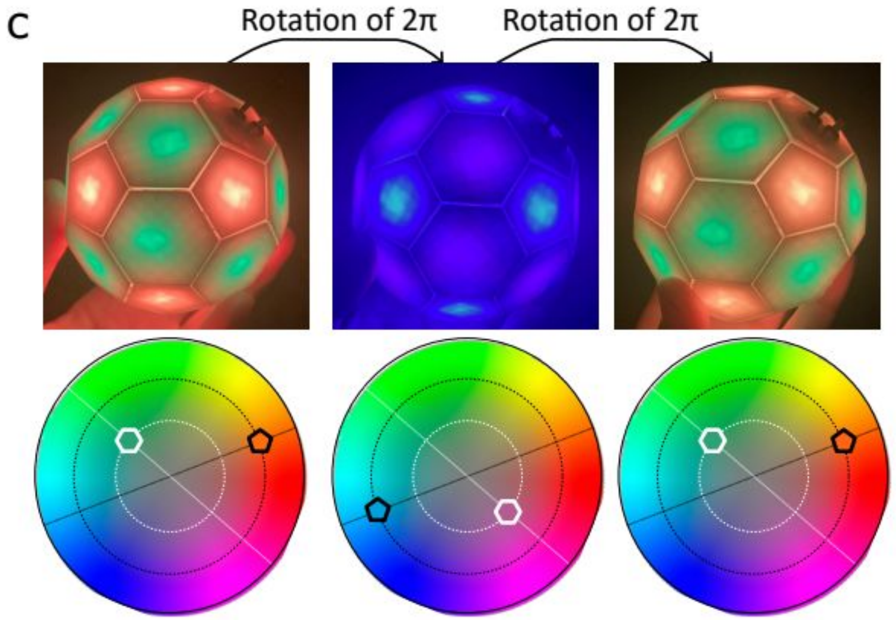
Comment se transforme un spineur sous l'effet d'une rotation ?



Etats remarquables :

- |up>
- |down>
- $|+\rangle = 1/\sqrt{|up> + |down>}$

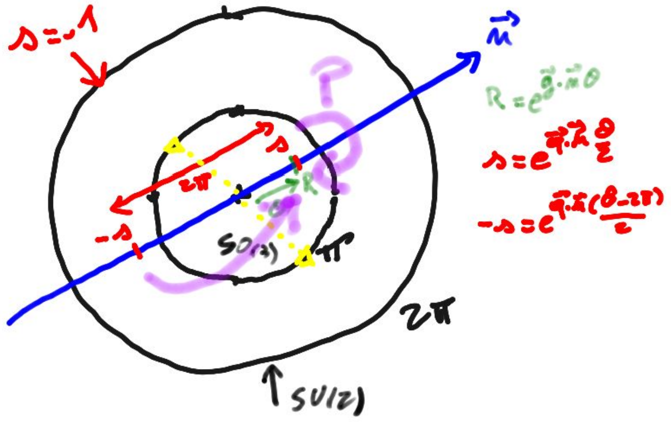
1. Les boules spinorielles : couverture double



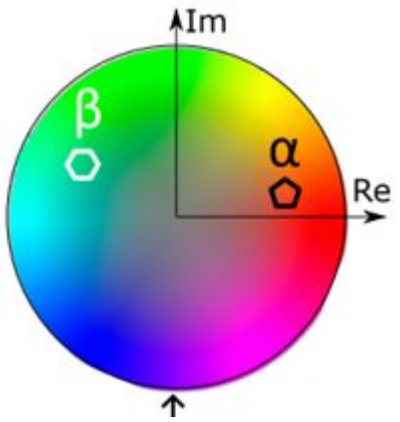
- A toute position dans l'espace des rotations sont associés 2 spineurs opposés

- A tout spineur on associe une seule rotation

- En parcourant SO(3), on parcourt l'espace des spineurs SU(2)



1. Les boules spinorielles : détecteur d'homotopie



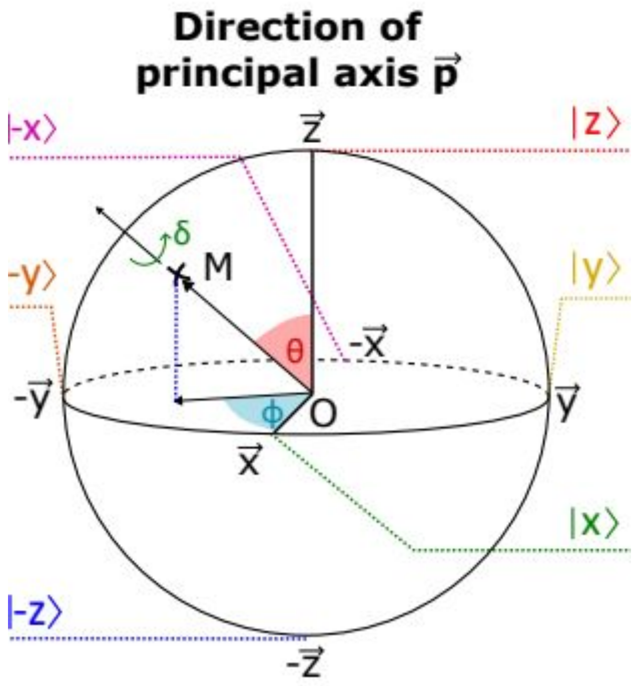
On effectue une boucle dans SO(3)

- Si le spineur revient à son état initial, la boucle de SO(3) est contractible
- Si le spineur devient son opposé, la boucle est non contractible

1 tour selon n'importe quel axe
□ Changement de signe

1. Les boules spinorielles : axe propre

L'aze propre (OM) s'obtient en appliquant la rotation au vecteur initial $\mathbf{u}_z$



Toute rotation autour de l'axe propre modifie uniquement la phase globale du spineur.

(fibre de Hopf)

1. Les boules spinorielles : spin 1

$$|\Psi\rangle = a|-1\rangle + b|0\rangle + c|1\rangle$$

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1$$

- Comment se transforme une fonction d'onde à 3 états sous l'effet d'une rotation
- Retourne à l'état initial après n'importe quelle boucle

3 couleurs

1. Les boules spinorielles : spin 1 - Validation

J. Phys. A: Math. Gen. 27 (1994) L435–L438. Printed in the UK

LETTER TO THE EDITOR

A geometric phase for $m = 0$ spins

J M Robbins† and M V Berry‡

† Department of Mathematics and Statistics, James Clerk Maxwell Building, The King's Buildings, Mayfield Road, Edinburgh EH9 3JZ, UK

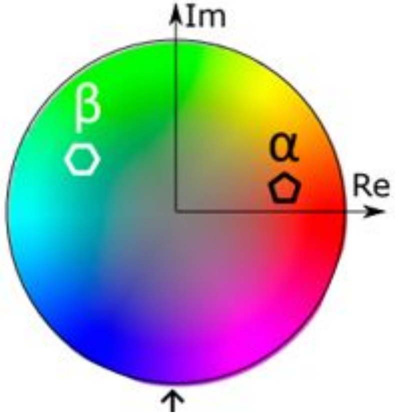
‡ H H Wills Physics Laboratory, Tyndall Avenue, Bristol BS8 1TL, UK

Received 5 April 1994

Abstract. A $|jm\rangle$ spin state in an adiabatically-cycled magnetic field acquires a geometric phase of m times the solid angle described by $\boldsymbol{B}$, so that for $m = 0$ states the geometric phase vanishes. However, if $\boldsymbol{B}$ is not cycled, but is made to reverse direction, an $m = 0$ state returns to itself and in so doing acquires a geometric phase factor of $(-1)^j$. This phase is of a topological character; parameter space is the real projective plane, in which the phase distinguishes trivial from non-trivial cycles.

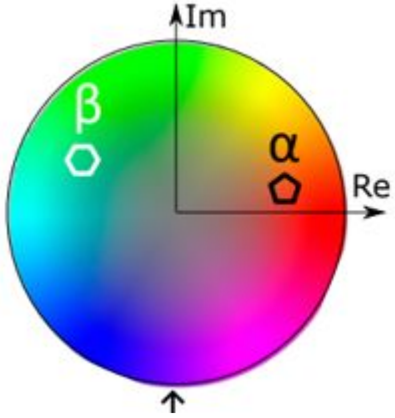
½ tour selon n'importe quel axe

(sauf Oz pour lequel rien ne bouge, cf. état |m=0>)



1. Les boules spinorielles : spin 3/2

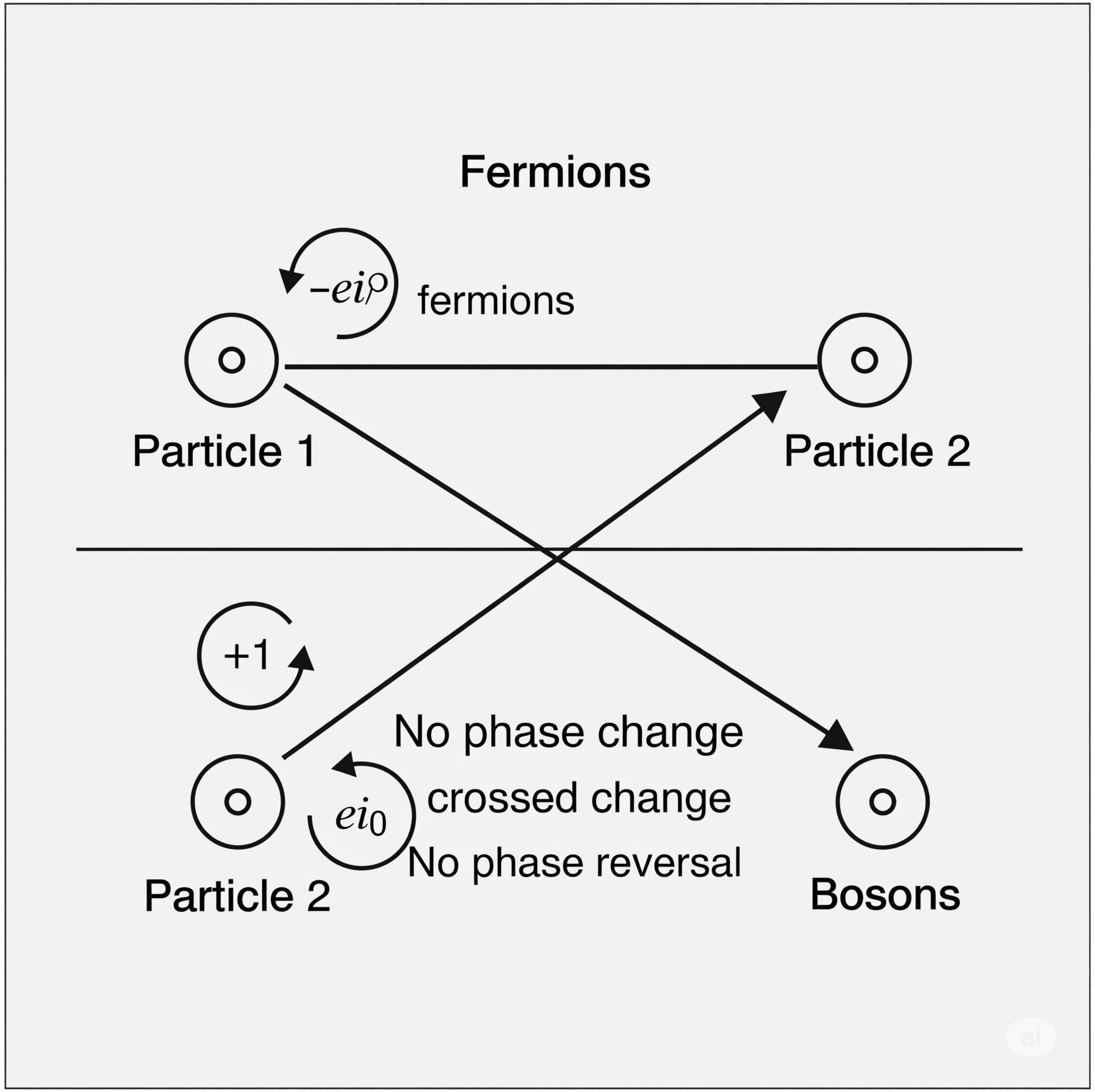
$$|\psi\rangle = a\left|-\tfrac{3}{2}\right\rangle + b\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle + c\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle + d\left|\tfrac{3}{2}\right\rangle$$



- Comment se transforme une fonction d'onde à 3 états sous l'effet d'une rotation
- Boucle non contractible -> changement de signe

1 tour selon n'importe quel axe
- Changement de signe

4 couleurs



Fermions
−eiρ
fermions
Particle 1
Particle 2
+1
No phase change
crossed change
No phase reversal
ei_0
Particle 2
Bosons

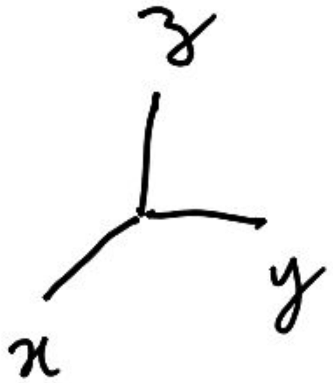
2. Cas semi-classique: 2 particules ponctuelle *discernables*

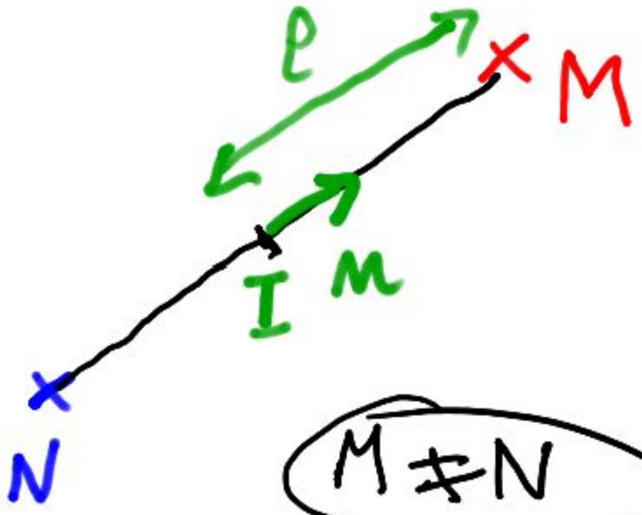
Differentes

D esp. de configuration

$D = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3*}$

M N





$M \neq N$

$D = \mathbb{R}^3 \times]0\ +\infty[\times S^2$

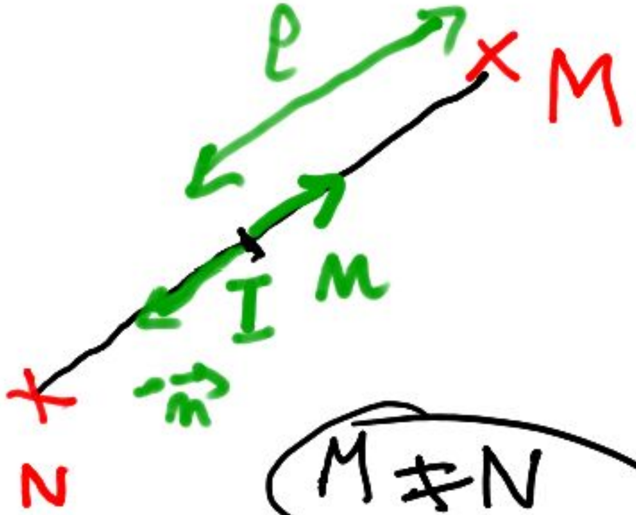
I ℓ $\vec{n}$

2. Cas semi-classique: 2 particules ponctuelles identiques

E esp. de configuration

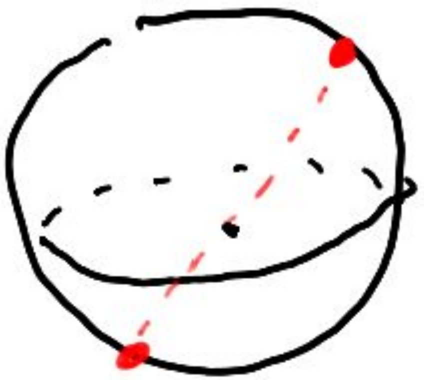
$$E = \underset{M}{\mathbb{R}^3} \times \underset{N}{\mathbb{R}^{3}}{}^{*} / \sim$$

$$(M,N) \sim (N,M)$$



$M \neq N$

$$D = \underset{I}{\mathbb{R}^3} \times \underset{\ell}{]0\ +\infty[} \times \underset{\overleftrightarrow{m}}{\mathbb{RP}^2}$$



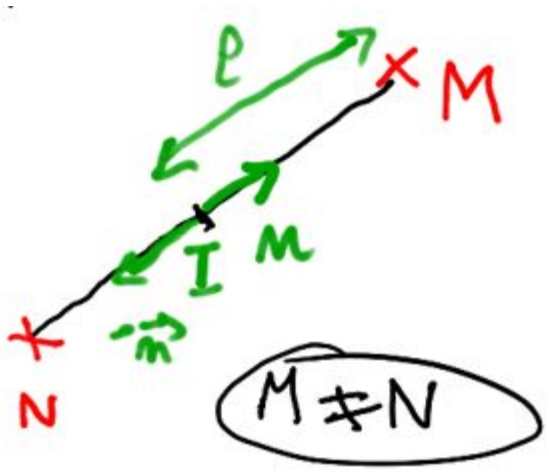
$$\mathbb{RP}^2 = S^2/\sim$$

2. <u>Cas semi-classique:</u> Espace de configuration

$\mathbb{R}P^2 = \{\text{droites par } O\}$

$S^2/\sim \; = SSO(3)$

$$E = \mathbb{R}^3 \times \left]0, +\infty\right[\times SSO(3)$$



<u>Equivaut à identifier les couples (M,N) et N,M)</u>

(M,N) □ { M, N }
(N,M) □ { M, N }

dans E espace quotient

2. Cas semi-classique: Evolution d'une particule

$$E = \cancel{\mathbb{R}^3} \times \left]0, \cancel{+}\infty\right[\times SSO(3)$$

λ varie dans $SSO(3)$

Un échange est une boucle non contractible de Λ

- Dans l'espace de configuration E où on a identifié (M, N) et (N, M)
- **Car cela correspond à un chemin qui échangerait 2 particules discernables**

2. Cas semi-classique: Evolution d'une particule

Or on sait qu'un spin demi entier prend un signe -1 quand il varie suivant un paramètre λ qui effectue une boucle non contractible dans SO(3)

Pour un spin entier, pas de signe (-1)

λ varie dans SSO(3)

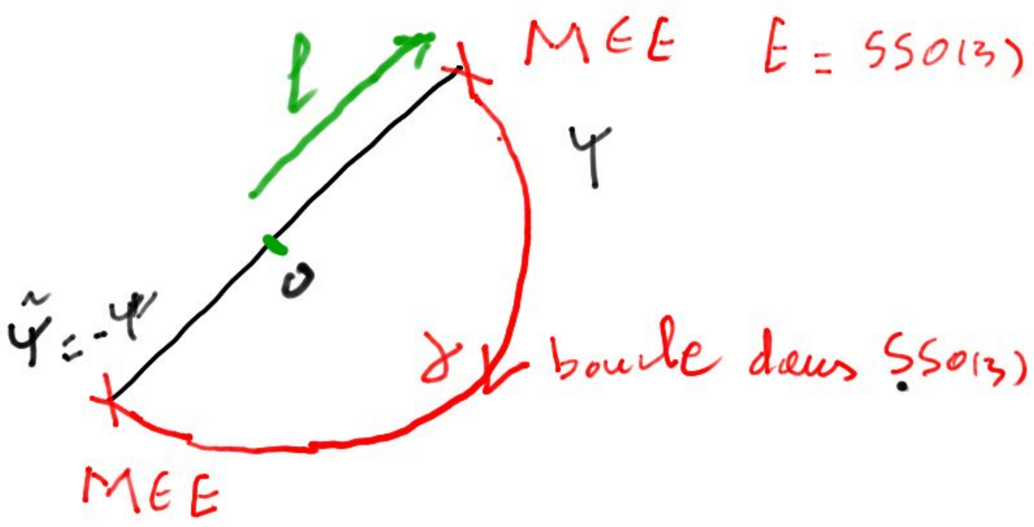
Donc pour un spin demi entier $\Psi \xrightarrow[\text{échange}]{} \tilde{\Psi} = -\Psi$

Donc pour un spin entier $\Psi \longrightarrow \tilde{\Psi} = \Psi$

2. Cas semi-classique: à l'origine (« Pauli »)

« 2 particules identiques » décrit par un Ψ de spin demi-entier

Imaginons que l'objet « barre rouge-rouge » soit décrit par une fonction d'onde de spin demi-entier



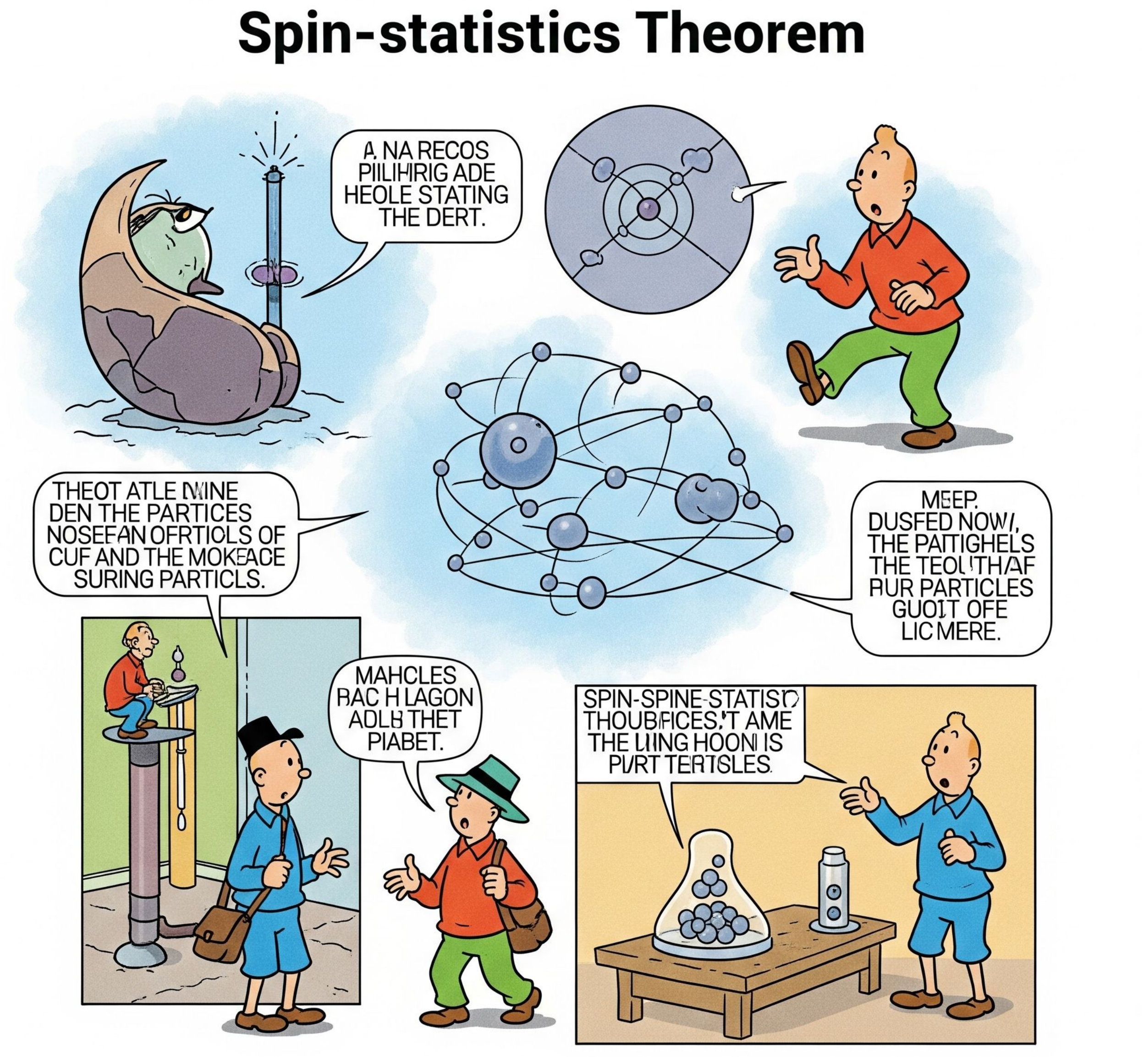
« Les 2 particules de spin demi-entier ne peuvent être au même endroit »

les 2 extrémités de la barre (2 spineurs) ont des Ψ opposés

qd $l \to 0$ on ne peut pas définir $\Psi(0)$ de façon continue

!! Bivaluation en 0 ? ?

???


Spin-statistics Theorem
A NA RECOS PIILIHRIG ADE HEOLE STATING THE DERT.
THEOT ATLE DWINE DEN THE PARTICES NOSEFAN OFRTIOLS OF CUF AND THE MOKEACE SURING PARTICLS.
MEEP. DUSFED NOW, THE PATIGHELS THE TEOUTHAF RUR PARTICLES GUOIT OFE LIC MERE.
MAHCLES BAC H LAGON ADLB THET PIABET.
SPIN-SPINE-STATIST THOUBFICES,'T AME THE LIING HOONI IS PURT TERTSLES.