

Introduction à la turbulence

B. Apffel

August 28, 2023

1 Avant-propos

Je ne suis pas un spécialiste de la turbulence, mais c'est un sujet qui m'intéresse et que je croise souvent en conf'. J'ai donc fait des petites notes pour retenir les trucs importants et je trouvais sympa de les partager. Un bouquin qui m'a beaucoup inspiré et dont ces notes sont en grande partie un résumé : Physique de la turbulence de S. Galtier. Clair, pas trop long et très axé physique. Si vous avez le temps, lisez le livre plutôt que ces notes !

2 Historique de la turbulence

- de Vinci: premier dessin de la turbulence
- Reynolds: première expériences quantitatives sur la turbulence. Il observe un écoulement dans un canal et change la vitesse de l'écoulement. Il remarque qu'au-delà d'une certaine vitesse, l'écoulement forme des tourbillons. Il remarque également que lorsque la température augmente, la transition se produit plus facilement.
- Richardson: Introduction de la cascade d'énergie: les gros tourbillons forment des plus petits, qui continuent de se diviser et finissent par se dissiper. Il étudie aussi les phénomènes de diffusion en écoulement turbulent et trouve une diffusion plus rapide que dans le cas d'une diffusion Brownienne. Il trouve un coefficient de diffusion non constant $D_l \sim l^{4/3}$ avec l la distance entre les particules (mouvement Brownien: D_l indépendant de l).
- Taylor: fonction de corrélation à 2 points $\langle u(x, t)u(x, t+T) \rangle$ avec $\langle . \rangle$ la moyenne d'ensemble: vision statistique de la turbulence.
- von Karman/Howarth : équation de la mécanique des fluides sur les corrélateurs plutôt que sur le champ de vitesse
- Kolmogorov/Obukhov: loi des 4/5 pour une turbulence incompressible homogène et isotrope, en utilisant la fonction de structure d'ordre 3
- Grant, Stewart, Moilliet: observation expérimentale en 1962 de cette loi
- Problème de la fermeture: plein de gens, plein de modèles plus ou moins compliqués et plus ou moins convaincants.
- Turbulence 2D: cascade inverse, dissipation vers les grandes échelles, très différent de la 3D.
- Sujets liés: magneto-hydrodynamique (MHD) qui exhibe un cas de cascade inverse en 3D, turbulence d'onde, simulation directe (DNS) etc

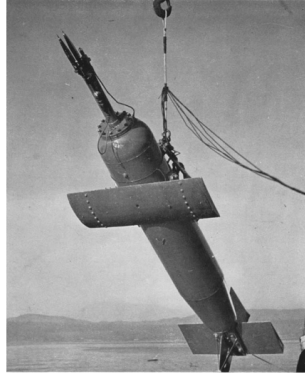


FIGURE 4. The towed body.

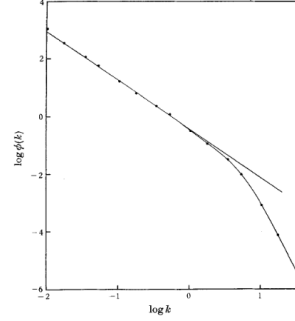


FIGURE 9. A logarithmic plot of the one-dimensional spectrum for the run at 0905/3/10/59. The straight line has a slope of $-\frac{5}{3}$.

Figure 1: Dessin de De Vinci et figures extraites de Grant et al, 1962

3 Equations constitutives et premiers ennuis

Equations de Navier Stokes pour un fluide incompressible Newtonien

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (1)$$

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} P / \rho + \nu \Delta \vec{u} \quad (2)$$

avec \vec{u} le champ de vitesse, P le champ de pression, ν la viscosité cinématique, ρ la masse volumique. Résoudre NS = trouver un champ de vitesse \vec{u} et un champ de pression P qui vérifie cette équation et les conditions aux limites. C'est presque toujours impossible sauf dans des cas simples et symétriques, à cause de la non-linéarité. Remarque: la preuve mathématique de l'existence et la régularité des solutions de cette équation est un problème du millénaire. On va donc devoir ruser et estimer les ordres de grandeur pour pouvoir dire des choses.

Nombre de Reynolds: non-linéaire vs viscosité

$$Re \sim \frac{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}}{\nu \Delta u} \sim \frac{Lu}{\nu} \quad (3)$$

avec L la taille typique de l'écoulement. Si $Re \ll 1$, la viscosité domine et le fluide se comporte 'gentiment'. Si $Re \gg 1$, régime de turbulence forte, le terme non-linéaire joue à plein !

Si $Re \gg 1$, on peut négliger le terme visqueux ? Pas du tout ! Sans terme visqueux, on obtient l'équation d'Euler

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} P / \rho \quad (4)$$

qui conserve l'énergie du système. On pose $dE = (\rho u^2 / 2) d\vec{x}$. On a alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dE = -\rho \nu \int (\vec{\nabla} \times \vec{u})^2 d\vec{x} \quad (5)$$

On en profite pour introduire la vorticité $\vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ et l'entrophie $\Omega = w^2 / 2$. Lorsque la turbulence est homogène, on peut identifier moyenne spatiale et moyenne d'ensemble. On a alors

$$\partial_t \langle E \rangle = -\rho \nu \langle \Omega \rangle / 2 = -\epsilon(\nu) \quad (6)$$

avec ϵ le taux de dissipation. Donc si $\nu = 0$, on a $\partial_t E = 0$! Au contraire, expérimentalement on observe $\partial_t E \rightarrow C > 0$ quand $Re \rightarrow \infty$: c'est l'anomalie dissipative. Il y a une limite singuläre ici: la solution quand la viscosité tend vers 0 ne se comporte pas du tout comme la solution à viscosité nulle ! C'est lié au fait que même si ν est très petit, on brise la symétrie $t \rightarrow -t$. Une solution quantitative possible : $\nabla \times \vec{u}$ diverge quand la viscosité tend vers 0.

Un toy model pour montrer cet effet (tiré de W. Appel, Mathématiques pour la physique, un super livre!). Roméo et Juliette de part et d'autre d'un bateau posé sur un fluide visqueux ou non-visqueux. Roméo veut rejoindre Juliette. Comment se déplace le bateau lorsque Roméo bouge ?

- Cas non-visqueux : aucune force sur le système { bateau + Romeo + Juliette } : si Roméo de masse m bouge de L , la barque avec Juliette de masse M doit bouger de mL/M dans l'autre direction pour conserver la position du barycentre.
- Cas visqueux: x position de la barque et y celle de Roméo par rapport à la Terre. On a $M\ddot{x} + m\ddot{y} = -\eta\dot{x}$. On intègre en zéro et l'infini ou rien ne bouge : $x(\infty) - x(0) = 0$, la barque ne bouge pas !

4 Approche phénoménologique

Concrètement, que se passe-t-il dans le fluide ? Approche Richardson: les gros tourbillons se scindent en petits, qui se scindent en plus petits etc jusqu'à l'échelle visqueuse. En pratique, c'est un peu plus compliqué. Taylor: deux points dans un écoulement turbulent s'éloignent. Mais la vorticité dans un tube, lorsque la viscosité est nulle, est conservée (théorème de Kelvin) et l'incompressibilité impose un amincissement du tube. Donc la norme de la vorticité augmente, jusqu'à atteindre l'échelle de dissipation visqueuse. Remarque: plus ν est faible, plus cette échelle est petite et plus la vorticité peut exploser. C'est une solution qualitative à l'anomalie dissipative.

5 Vision statistique de la turbulence

But: trouver une équation pour estimer le taux de dissipation ϵ , qui dépend de la moyenne d'ensemble. Equation de Karman-Howarth: trouver une équation sur les corrélateurs plutôt que sur le champ de vitesse. On pose $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$ et $\vec{u}' = \vec{u}(\vec{x}')$. Hypothèse d'homogénéité: si $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{l}$, les corrélateurs ne dépendent que de \vec{l} . On introduit ensuite la fonction de structure d'ordre 3

$$\langle (\vec{u} - \vec{u}')^3 \rangle = \langle \delta \vec{u}^3 \rangle \quad (7)$$

et on obtient après quelques calculs et manipulations d'indices

$$\partial_t \langle \frac{u_i u'_i}{2} \rangle = \frac{1}{4} \vec{\nabla}_{\vec{l}} \langle (\delta \vec{u} \cdot \delta \vec{u}) \delta \vec{u} \rangle + 2\nu \partial_{l_k l_k}^2 \langle \frac{u_i u'_i}{2} \rangle \quad (8)$$

Pour aller plus loin, on fait l'hypothèse de localité. Séparation entre 3 échelles: l'échelle de forçage l_0 , l'échelle de dissipation l_{diss} et l'échelle dite intertielle l sur laquelle à la fois le forçage et la viscosité peuvent être considérés comme ne jouant aucun rôle. On suppose donc

$$l_{diss} \ll l \ll l_0 \quad (9)$$

et on va écrire des équations sur cette zone intertielle. Pour cela, on rajoute un forçage large échelle \vec{f} dans NS. L'équation de KH se transforme comme

$$\partial_t \langle \frac{u_i u'_i}{2} \rangle = \frac{1}{4} \vec{\nabla}_{\vec{l}} \langle (\delta \vec{u} \cdot \delta \vec{u}) \delta \vec{u} \rangle + 2\nu \partial_{l_k l_k}^2 \langle \frac{u_i u'_i}{2} \rangle + F(\vec{l}) \quad (10)$$

avec $F(\vec{l}) = \langle f_i u'_i + f'_i u_i \rangle / 2$ un corrélateur qui dépend du forçage. Remarque: si $\vec{l} = 0$, on retrouve

$$\partial_t \langle E \rangle = \rho F(0) - \epsilon(\nu) \quad (11)$$

et un écoulement stationnaire donnera un équilibre entre puissance injectée et dissipée. Si on suppose maintenant que $l \ll l_0$, on peut écrire $F(\vec{l}) \approx F(0) = \epsilon(\nu)$. En supposant en plus qu'on peut négliger les effets de la viscosité à cette échelle, on trouve

$$-4\epsilon = \rho \vec{\nabla}_{\vec{l}} \langle (\delta \vec{u} \cdot \delta \vec{u}) \delta \vec{u} \rangle \quad (12)$$

Avec en plus une hypothèse d'isotropie, on obtient après intégration la loi des 4/3

$$-\frac{4}{3} \epsilon l = \rho \langle (\delta u_i)^2 \delta u_i \rangle \quad (13)$$

avec u_l la vitesse projetée dans la direction \vec{l} entre les deux points de mesure. Expérimentalement, on préférera la loi des 4/5 de Kolmogorov car il m'y a besoin que d'une seule vitesse

$$-\frac{4}{5}\epsilon l = \rho \langle (\delta u_l)^3 \rangle \quad (14)$$

C'est le premier résultat exact en turbulence !

On peut retrouver les résultats précédents sans passer par les calculs. On considère un tourbillon de taille l avec une vitesse typique $u_l \sim \sqrt{\delta u_l^2}$. Le temps de retournement du tourbillon est $\tau \sim l/u_l$ que l'on identifie au temps typique de cascade de l'énergie à l'échelle l . On a alors

$$\epsilon_l \sim \partial_t E_l \sim u_l^2/\tau \sim u_l^3/l \quad (15)$$

Dans la zone inertielle, le transfert d'énergie se fait de la même manière à toutes les échelles (hypothèse dite d'auto-similarité) et de manière locale: toute l'énergie est envoyée vers les échelles plus petites. On a donc $\epsilon_l = \epsilon$. On retrouve donc $\epsilon l \sim \langle u_l^3 \rangle$

On peut essayer d'étendre l'argument dimensionnel et tenter une loi du même type pour les autres fonctions de structure

$$\langle (\delta u_l)^p \rangle \propto (\epsilon l)^{\xi_p} \quad (16)$$

avec $\xi_p = p/3$ pour que ça marche à l'ordre 3. Problème: ça ne colle pas aux données expérimentales ! Raison supposée: les propriétés auto-similaires ne sont pas correctes aux échelles supérieures et il existe des singularités de dissipation. Modèles pour corriger: fractales de Frisch, log-normale de Kolmogorov et Obukhov.

6 Anomalie dissipative et intermittence

On va maintenant discuter la dissipation non nulle quand $\nu \rightarrow 0$. On a déjà discuté d'une explosion de la vorticité en temps fini, mais alors comment définir la dérivée en ces points ? Soit on dit que l'équation de NS n'est plus valable sur des échelles trop petites, soit on passe par une formulation faible. Idée: travailler avec des distributions et lisser le champ de vitesse sur une boule de rayon r (Leray). On prend une fonction ϕ à support compact, C-infinie sur $B(0, r)$ qui somme à 1 et on pose $u^r = \int_{B(\vec{y}, r)} \phi(\vec{x} - \vec{y}) u(\vec{x}) d\vec{x}$. On peut alors après calcul sortir une équation de la forme

$$\partial_t \left(\frac{\vec{u}^r \cdot \vec{u}}{2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}^r = -D_I^r - D_\nu^r \quad (17)$$

avec

$$D_I^r = \frac{1}{4} \int \nabla \phi^r [(\delta u)^2 \delta u] \quad (18)$$

$$D_\nu^r = \nu \vec{w} \cdot \vec{w}^r \quad (19)$$

$$(20)$$

et je vous passe l'expression de \vec{J} qui est simplement un flux d'énergie. Remarque: ici pas de moyenne d'ensemble, c'est une équation qui traduit localement la conservation de l'énergie dans la petite boule de rayon r . Egalement, les dérivées spatiales sont appliquées sur ϕ et non plus sur \vec{u} (on a fait une IPP) donc tout reste régulier. C'est l'avantage des formulations faibles ! Si on prend $r \rightarrow 0$ et $\nu = 0$, il reste un terme de dissipation inertielle !

Et l'intermittence ? C'est le fait qu'il existe des zones spatio-temporelles de forte activité dissipative avec de nombreux autres endroits de calme. La présence de bouffées intermittentes brise le caractère auto-similaire de l'écoulement ! Preuve expérimentale: les ailes non-gaussiennes dans les différences de vitesse à 2 points lorsque la distance entre les 2 points est trop faible. Les fluctuations importantes sont trop nombreuses par rapport à des sommes de variables gaussiennes indépendantes.

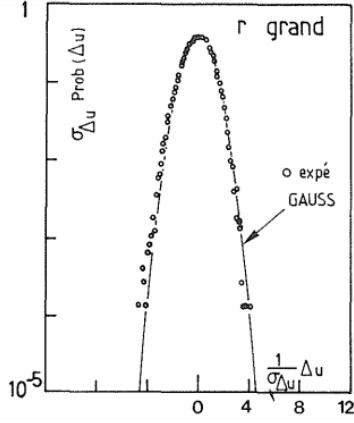


Figure 9 – Loi de probabilité des fluctuations de la différence des vitesses en deux points lorsque la distance de ceux-ci est comparable à l'échelle énergétique de la turbulence.

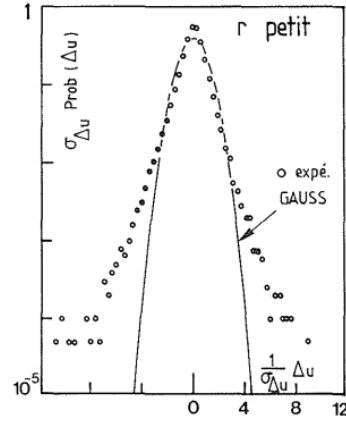


Figure 10 – Loi de probabilité des fluctuations de la différence des vitesses en deux points lorsque la distance de ceux-ci est comparable à l'échelle dissipative de la turbulence.

Figure 2: Mesure des histogrammes des fonctions de corrélation à 2 points pour une distance grande et petite (tiré de Une introduction à la physique de la turbulence, J.C. Lelièvre)

7 Théorie spectrale

Jusqu'à présent, on a travaillé sur les fonctions de corrélations dans l'espace direct. L'approche Fourier offre un point de vue dual qui donne une autre compréhension des choses. On pose

$$\vec{u}(\vec{k}) = \int \vec{u}(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{x} \quad (21)$$

et le corrélateur en Fourier s'écrit

$$\langle u_i(\vec{k}) u_j(\vec{k}') \rangle = \int \langle u_i(\vec{x}) u_j(\vec{x}') \rangle e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x} + \vec{k}'\cdot\vec{x}')} d\vec{x} d\vec{x}' \quad (22)$$

avec l'hypothèse d'homogénéité, le corrélateur est nul sauf si $\vec{k} = -\vec{k}'$ on a finalement

$$\phi_{ij}(\vec{k}) = \int \langle u_i(\vec{x}) u_j(\vec{x} + \vec{l}) \rangle e^{-i\vec{k}\cdot\vec{l}} d\vec{l} \quad (23)$$

Le spectre d'énergie cinétique est alors défini par

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} \langle u^2 \rangle = \frac{1}{2} \int \phi_{ii}(\vec{k}) d\vec{k} \quad (24)$$

Avec une turbulence isotrope, on peut finalement écrire en intégrant sur les coordonnées angulaires

$$\langle E \rangle = \int E_k dk \quad (25)$$

8 Turbulence d'onde

On peut fermer les équations !