La boule spinorielle ; un objet macroscopique de spin 1/2 ?

Samuel Bernard-Bernardet (juillet 2021)

I. SO(2) $\equiv$ U(1)

Une transformation du plan qui préserve les distance et garde un point fixe est une isométrie. Elle ets représentée par un matrice R orthogonale ie $R^*R) = Id$

(Elle envoie une base orthonomée vers une base orthonomée)

Si elle préserve l'orientation c'est une rotation. cela se traduit par $det(R) = 1$

Les rotations du plan forment le groupe spécial orthogonal SO(2)

Toute rotation du plan peut s'écrire : $R = e^G$

G est une matrice 2x2 appelé générateur de la rotation

Les conditions $R^*R = Id$ et $det(R) = 1$ se traduisent en :

$$G^* = -G \text{ antisymétrique} \tag{1}$$
$$tr(G) = 0 \tag{2}$$

Donc G doit être de la forme (condition nécessaire)

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Réciproquement, on vérifie que :

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{4}$$

est bien une rotation.

Le calcul de l'exponetielle de matrice s'effectue grâce à la définition de l'exponentielle sous la forme

$$e^G = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{G^n}{n!}) \tag{5}$$

et en utilisant le fait que

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -\mathbb{1} \tag{6}$$

La matrice $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ est en fait le nombre imagnaire i.

Les nombres complexes sont la sous algèbres engendrées par $\mathbb{1}$ et $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

et on retrouve le fait qu'une rotation s'écrit :

$$e^{\begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}} = e^{\theta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} = e^{i\theta} \tag{7}$$

Donc SO(2) est isomorphe à l'ensemble des complexes de module un autrement dit U(1) le cercle unité.

Nota Bene : un nombre complexe a+ib s'écrit donc

$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \tag{8}$$

On voit sur cette expression qu'un coplexe de module 1 est donc bien isomorphe à une pmtrice orthogonale.
Le complexe conjugué est :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \tag{9}$$

Les matrices complexes transconjuguées sont donc simplement des matrices symétriques réelles particulières si on utilise la représentation matricielle d'un nombre complexe.

II. SO(3)

Tout déplacement d'un corps rigide avec un point fixe est équivalent à une rotation d'angle θ autour d'un axe $\vec{u}$ (Euler 1775).

SO(3) est le groupe (non commutatif) de ces rotations de l'espace.

C'est l'ensemble des matrices orthogonales R de determinant 1 (Isométries positives) ie

$$R^*R = Id \tag{10}$$
$$Det(R) = 1 \tag{11}$$

Une rotation s'écrit : $R = R_{\theta,\vec{u}}$ avec $\theta \in [-\pi, \pi]$ et $|\vec{u}| \ = 1$

Soit $R = R_{\vec{U}}$ avec $\vec{U} = \theta\vec{u}$

Ce système de coordonnées sur SO(3) définit une rotation de façon unique si $|\theta| < \pi$ mais $R_{\pi,\vec{u}} = R_{-\pi,\vec{u}}$

SO(3) est donc la boule $B \in \mathbb{R}^3$ où 2 points opposés sur la boule correspondent à la même rotation.

SO(3) n'est pas simplement connexe : il y a des lacets fermés contractibles et d'autres non contractibles.

Tout élément $R_{\vec{U}} \in SO(3)$ s'écrit :

$$R_{\vec{U}} = e^{\tilde{G}_{\vec{U}}} \tag{12}$$

avec $G^*_{\vec{U}} = -G_{\vec{U}}$
et Tr(G) = 0
Le générateur $\tilde{G}_{\vec{U}}$ est donc de la forme antisymétrique:

$$G_{\vec{U}} = \begin{bmatrix} 0 & -U_z & U_y \\ U_z & 0 & -U_x \\ -U_y & Ux & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Condition nécessaire et suffisante...

L'espace des générateurs $so(3) := \{\tilde{G}_{\vec{U}}, U \in \mathbb{R}^3\}$ = {matrices antisymétriques 3x3} est l'algébre de Lie du SO(3)

so(3) est isomorphe : $\mathbb{R}^3$ $so(3) \equiv \mathbb{R}^3$

III. SU(2)

Les spineurs sont les éléments de $\mathbb{C}^2$,

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + ix_2 \\ x_2 + ix_3 \end{bmatrix} \tag{14}$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$, $x_1, x_1, x_1, x_1 \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$.

Le produit scalaire (hermitien) de 2 vecteurs $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ est :

$$h(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u}^*.\vec{v} = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \bar{a}.c + \bar{b}.d \tag{15}$$

Les spineurs unitaires (ou verseurs) vérifient :

$$\|\vec{u}\|^2 = |a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{16}$$

Soit

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2 = 1 \tag{17}$$

Les spineurs unitaires sont les éléments de la sphère S^3 dans $\mathbb{R}^4$.

Les transformations linéaires qui conservent le produit scalaire de $\mathbb{C}^2$ sont les isométries positives, représentées par les matrices unitaires, ie qui vérifient :

$$M^*M = Id \text{ et } det(M) = 1, \text{ où } M^* \text{ est la matrice transconjuguée.} \tag{18}$$

Elles sont de la forme :

$$M = \begin{bmatrix} a & -\bar{b} \\ b, & \bar{a} \end{bmatrix} \text{avec } |a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{19}$$

On pense à $M \in SU(2)$ comme un changement de base dans $\mathbb{C}^2$

Ces transformations forment le groupe spécial unitaire $SU(2)$.

On note une bijection entre l'ensemble des spineurs unitaires et SU(2).

Tout élément $M \in\ SU(2)$ s'écrit :

$$M = e^{\tilde{G}} \tag{20}$$

Avec $\tilde{G}^* = -\tilde{G}$ (car $M^* = M^{-1}$) et $Tr(\tilde{G}) = 0$ (car $Det(M) = 1$)

$\tilde{G}$ s'écrit :

$$\tilde{G}_{\vec{U}} = -\frac{i}{2} \begin{bmatrix} U_z, & U_x - iU_y \\ U_x + iU_y, & -U_z \end{bmatrix} = -\frac{i}{2}(U_x\sigma_x + U_y\sigma_y + U_z\sigma_z) = -\frac{i}{2}\vec{\sigma}.\vec{U} \tag{21}$$

Avec $\vec{U} = (U_x, U_y, U_z) \in \mathbb{R}^3$ et :

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(matrices de Pauli)} \tag{22}$$

On pose : $\vec{U} = \theta\vec{u}, \qquad |\vec{u}| = 1$

Alors : $M_{\vec{u},\theta} = e^{\tilde{G}_{\vec{u},\theta}} = e^{-\frac{i\theta}{2}\vec{\sigma}.\vec{u}}$

Les matrices de Pauli vérifient $(\vec{\sigma}.\vec{u})^2 = Id$, cela permet de calculer l'exponentielle $e^{-\frac{i\theta}{2}\vec{\sigma}.\vec{u}}$ grâce à la définition de l'exponentielle sous la forme

$$e^{\tilde{G}} = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\tilde{G}^n}{n!}) \tag{23}$$

Finalement :

$$M_{\vec{u},\theta} = e^{-\frac{i\theta}{2}\vec{\sigma}.\vec{u}} = cos(\theta/2)\mathbb{1} - \frac{i}{2}(\vec{\sigma}.\vec{u})sin(\theta/2) \tag{24}$$

(extension de la formule d'Euler $e^{i\alpha} = cos(\alpha) + isin(\alpha)$)

$$M_{\vec{u},\theta} = \begin{bmatrix} cos(\theta/2) - iu_z sin(\theta/2), & -(iu_x + u_y)sin(\theta/2) \\ (-iU_x + iU_y)sin(\theta/2), & cos(\theta/2) + iu_z sin(\theta/2) \end{bmatrix} \tag{25}$$

L'espace des générateurs $su(2) := \{\tilde{G}_{\vec{U}}, U \in \mathbb{R}^3\}$ est l'algébre de Lie du SU(2)

su(2) est isomorphe $\mathbb{R}^3$: $su(2) \equiv \mathbb{R}^3$

so(3) et su(2) sont isomorphes.

(SO(3) et SU(2) sont localement isomorphes car so(3) et su(2) sont les espaces tangents.)

IV. QUATERNION

1834 Hamilton

Définition : $q = q_w\mathbb{1} + q_xI + q_yJ + q_zK$ avec $q_w, q_x, q_y, q_z \in \mathbb{R}$ et I, J, K des "nombres" qui vérifient

$$I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1 \tag{26}$$
$$\tag{27}$$

Cela implique :

$$JI = -K \neq JI \tag{28}$$
$$IJ = K, JK = I, KI = J \tag{29}$$

Les matrices

$$-i\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \qquad -i\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \tag{30}$$

Vérifient ces relations et la sous algèbre qu'elles engendrent est isomorphe à $\mathbb{H}$.
La norme d'un quaternion vaut : $\|q\|^2 = q_w^2 + q_x^2 + q_y^2 + q_z^2$

Les quaternions unitaires forment une sous algèbre.
On écrit sous forme matricielle

$$q = q_w\mathbb{1} + q_xI + q_yJ + q_zK = \begin{bmatrix} q_w - iq_z, & -(iq_x + q_y) \\ (-iq_x + iq_y), & q_w + iq_z \end{bmatrix} \tag{31}$$

SU(2) est isomorphe au groupe des quaternions unitaires.
En effet, on identifie

$$q = q_w 1 + q_x I + q_y J + q_z K = \begin{bmatrix} q_w - iq_z, & -(iq_x + q_y) \\ (-iq_x + q_y), & q_w + iq_z \end{bmatrix} \tag{32}$$

Par identification avec 25, on écrit un quaternion unitaire sous la forme :

$$q = cos(\theta/2)\mathbb{1} + sin(\theta/2)(u_x I + u_y J + u_z K) \tag{33}$$

Avec $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) \in \mathbb{R}^3$ et $|\vec{u}| = 1$

et

$$M = \begin{bmatrix} a, & -\bar{b} \\ b, & \bar{a} \end{bmatrix} \tag{34}$$

Donc

$$a = q_w - iq_z \tag{35}$$
$$b = -iq_x + q_y \tag{36}$$

V. RELATION SO(3) / SU(2)

On veut associer à tout élément de SU(2) un élement de SO(3)
Soit q un quaternion unitaire $q \in SU(2)$

$$q_{\theta,\vec{u}} = cos(\theta/2)\mathbb{1} + sin(\theta/2)(u_x I + u_y J + u_z K) \tag{37}$$

q encode une rotation $R_{\vec{u},\theta}$.
La rotation d'angle $\theta + 2\pi$ est la même, mais elle va être encodée par le quaternion opposé.

$$\begin{aligned} q_{\theta+2\pi,\vec{u}} &= cos(\theta/2 + \pi)\mathbb{1} + sin(\theta/2 + \pi)(u_x I + u_y J + u_z K) \\ &= -cos(\theta/2)\mathbb{1} - sin(\theta/2)(u_x I + u_y J + u_z K) \\ &= -q_{\theta,\vec{u}} \end{aligned} \tag{38}$$

A une rotation on peut associer 2 quaternions unitares opposés.
$SO(3) = SU(2)/\{-1, 1\}$ (mais $SU(2) \neq SO(3)X\{-1, 1\}$, c'est vrai uniquement localement cf fibration non triviale - cf. ruban de Moebius)

Version "rigoureuse" : On assimile un vecteur unitaire $\vec{(v)}$ de $\mathbb{R}^3$ à un quaternion purement imaginaire.(Une rotation d'angle pi)

A un quaternion on associe la rotation definie par :
$v \to v' = qvq{-}1$ (Conjugaison)
La fonction bivaluée qui associe à chaque rotation de l'espace 2 quaternions unitaires n'est pas un morphsime au sens propre mais : :

$$q(R1.R2) = +/-q(R1).q(R2) \tag{39}$$

VI. LA BOULE SPINORIELLE

La centrale inertielle renvoie à chaque instant un quaternion unitaire (Parmi les 2 possibles, qui sont opposés l'un à l'autre)

On choisit à chaque instant celui des 2 quaternions qui est le plus proche du quaternion associé à la position précédente pour assurer la continuité lors de la rotation de la boule.

On veut représenter ce quaternion par le spineur de norme 1 associé.

On visualise la valeur de chaque nombre complexe en les écrivant sous forme polaire

$$a = |a|e^{i\gamma} \text{ , avec } \gamma \in [-\pi, \pi] \tag{40}$$

$$b = |b|e^{i\delta} \text{ , avec } \delta \in [-\pi, \pi] \tag{41}$$

a est associé à la couleur de la face hexagonale, et b auc faces pentagonales.

La phase est représentée par une couleur.
La norme est représenté par la saturation. (Gris = 0, Vif = 1)

Vu le "morphisme" (39), tourner la boule spinorielle revient à multiplier les quaternions (au signe près) un peu comme tourner un cercle revient à multiplier 2 complexes de normes 1.

VII. QUBIT

Un système quantique à 2 états est décrit par une fonction d'onde qui s'exprime dans une base de $\mathbb{C}^2$: $\psi = a|0\rangle + b|1\rangle$ avec $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

On parle de qubit lorqu'on ne tient pas compte de la phase globale qui n'est pas détectable physiquement sans interféromètre. le qubit a donc 2 dimensions sur $\mathbb{R}$. On le représente sur la sphère de Bloch.

La boule spinorielle est une extension de la représentation d'un qubit par la sphère de bloch où la phase globale est prise en compte ce qui permet de la faire tourner continument.

La phase globale est la rotation du qubt autoure de son axe (cf. image du flagpole.)

Le représentation Bloch du qubit consiste à regrouper tous les qubits ayant la même phase globale, ie tous les spineurs s'obtenant par rotation autour de leur axes sont équivalents.

On passe continument d'un qubit à son opposé on faisant une rotation de 360 autour de n'importe quel axe.

La double couverture apparait naturellement : à toute position de la boule dans l'espace on associe deux spineurs qui sont opoosés

VIII. A SUIVRE

Boule spinorielle acoustique : 2 boules placées côtes à côte, dont l'une à fait une rotation de 360 /t à l'autre. En champ lointain, interférence destructives donne champ nul

Pétanque interférentielle : la même chose en réalité virtuelle, les 2 boules peuvent être exactement superposées et alors elles... disparaissent.

Octonion and the rolling ball : réalisaton d'un octonion en faisant rouler un boule spinorielle sur autre boule de rayon double. https://math.ucr.edu/home/baez/ball/

visualisation de l'intrication par des jeux de couleurs inatteignables

La pièce de tirage au sort qui donne 4 résultats : pile, face, elip, ecaf

IX. LIENS

`https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~faure/enseignement/M1_math_pour_physique/cours_chap3_groupes.pdf`

`https://dms.umontreal.ca/~mat2300/errata/su2.pdf`