Introduction à l'homologie simpliciale

Introduction

L'année dernière : groupes d'homotopies d'un esp. topologique
↳ Topologie algébrique
⇝ Étudier un peu de théorie des noeuds

Cette année : homologie simpliciale du point de vue historique

Topologie, homotopie : bases et philosophie

- Topo alg : étudier la topo des espaces par des moyens algébriques.

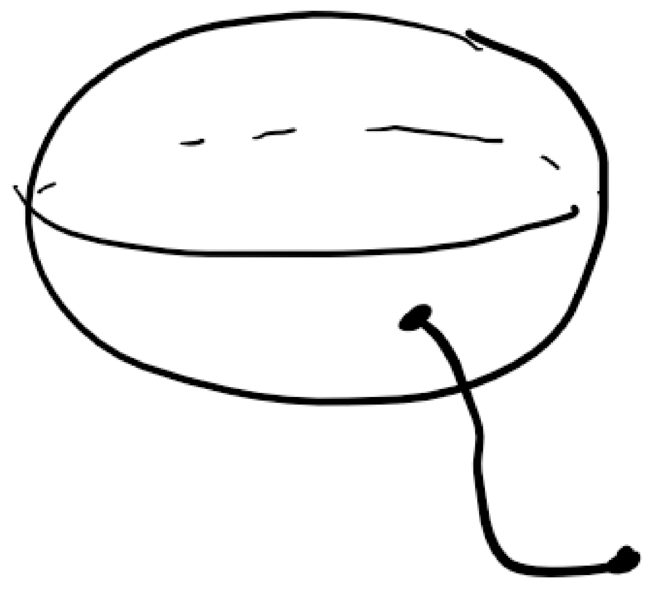
  Moyen alg. : manipuler des groupes (ou des str. alg. plus poussées)

  Top : à définir

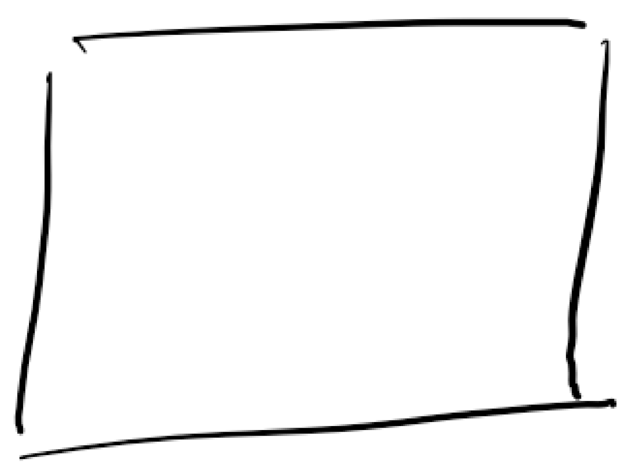
- Marc l'année dernière : géo diff

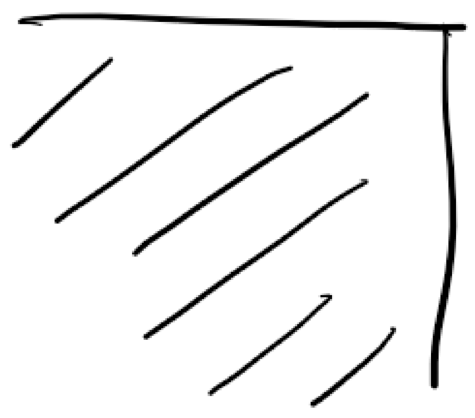
Objets d'étude : var. différentiables
→ des espaces « localement modelés sur $\mathbb{R}^n$ » avec des données permettant de parler de vecteurs, angles, espaces tangents etc.

var. diff dim $= 2$



pas var





pas var

But : classifier les variétés à éq. près

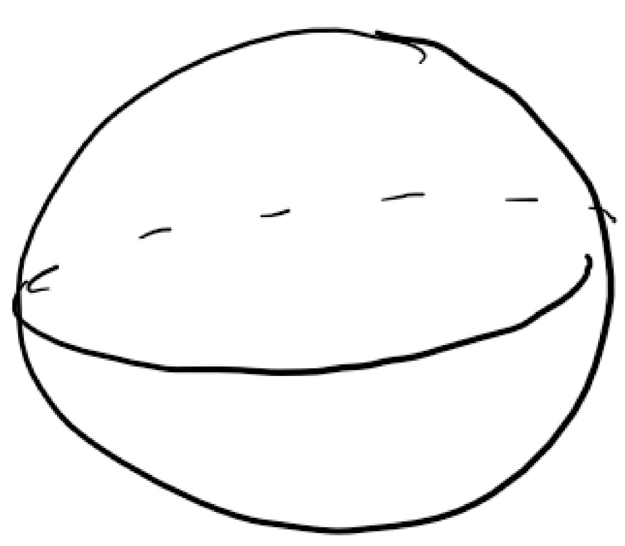
Deux var. sont éq. si on peut passer de l'une à l'autre par un difféomorphisme : transformation lisse / C^∞.

X, Y variétés

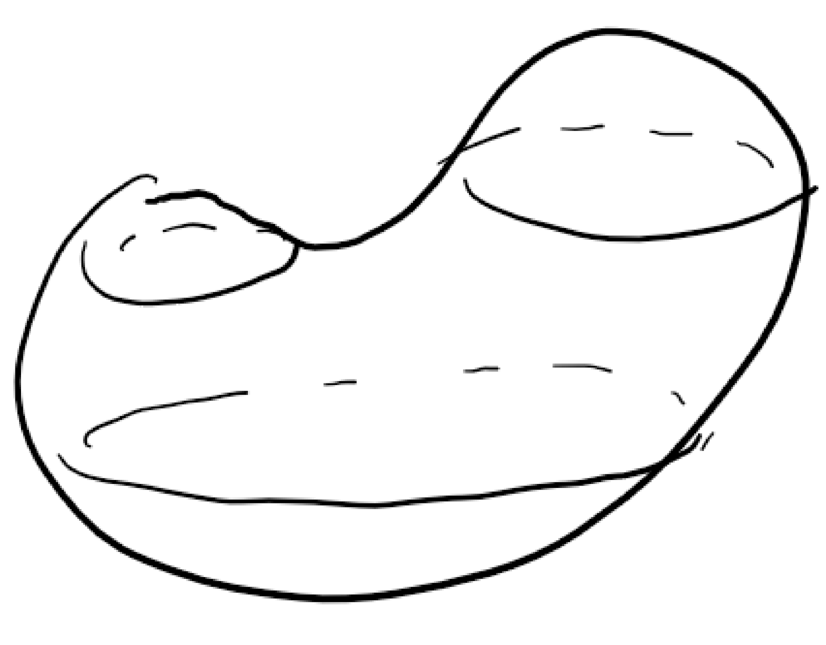
$f : X \longrightarrow Y$ bij. C^∞

$g : Y \longrightarrow X$ bij. C^∞

t.q. $f \circ g = g \circ f = id$.

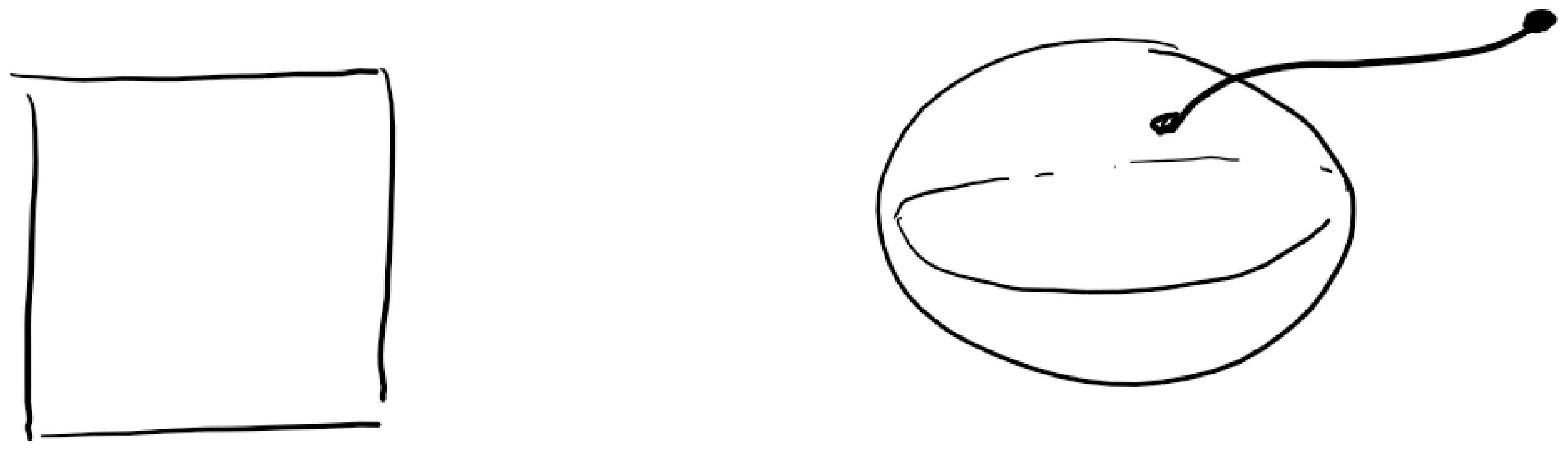


$\simeq$



• Topologie :

Objets d'étude : penser à des variétés où on a uniquement besoin de la notion de « continu » et pas de « lisse »



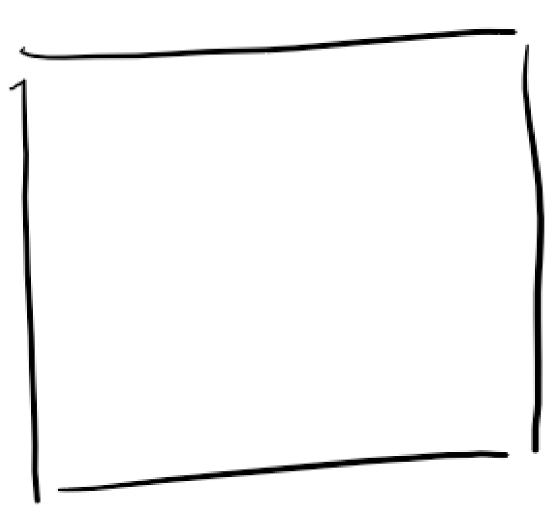
maintenant <u>ok</u>

→ Esp. topologique

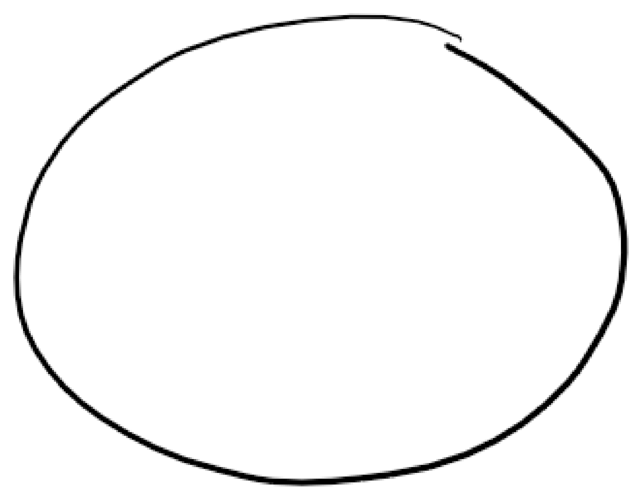
Cadre moins contraignant que géo diff

Rel d'équivalence : déformation <u>continue</u> d'une var. à l'autre

C^0



$\simeq$

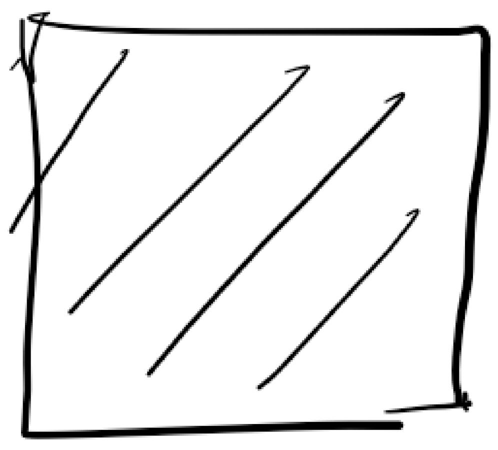
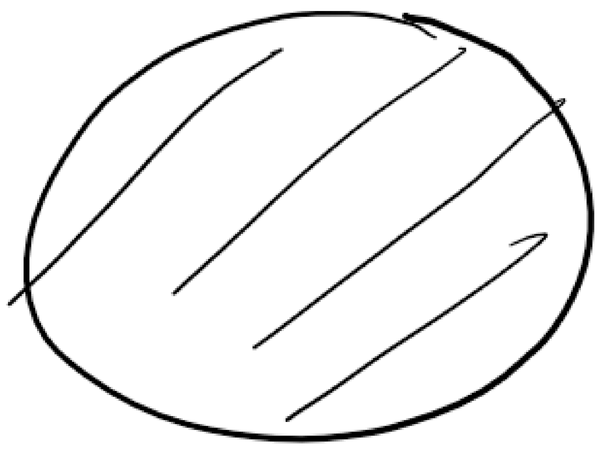


éq.

On parle d'homéomorphisme entre les deux esp.

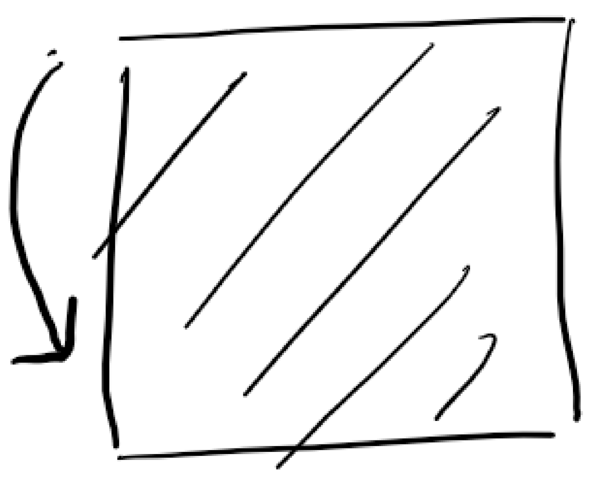
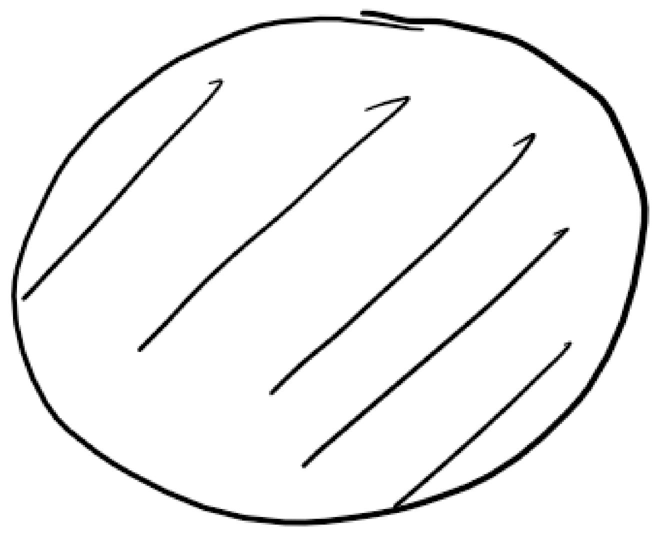
• Type d'homotopie d'un espace :

Relation d'éq. plus souple que « être homéo » : penser à homéo en partie comme « déformation continue ne faisant pas chuter la dimension »

 $\simeq$  $\not\simeq$ 

pas homéo

« Avoir le même type d'homotopie » : on s'autorise les déformations continues et non forcément bijectives

 $\simeq$ 

IS

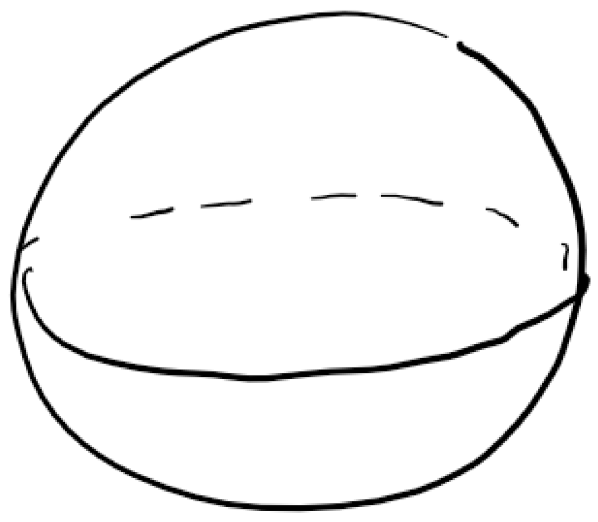
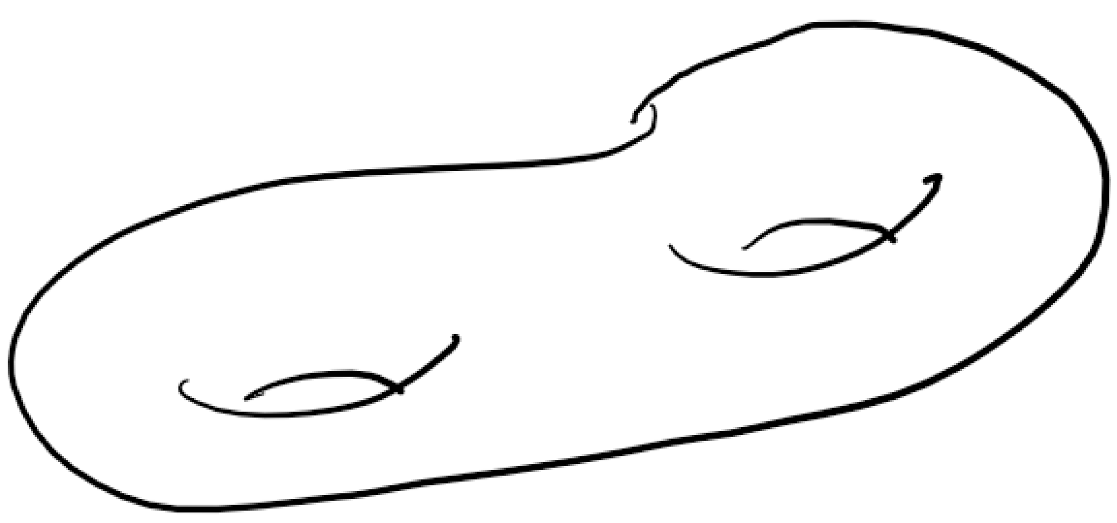
$f : X \to Y$

$g : Y \to X$

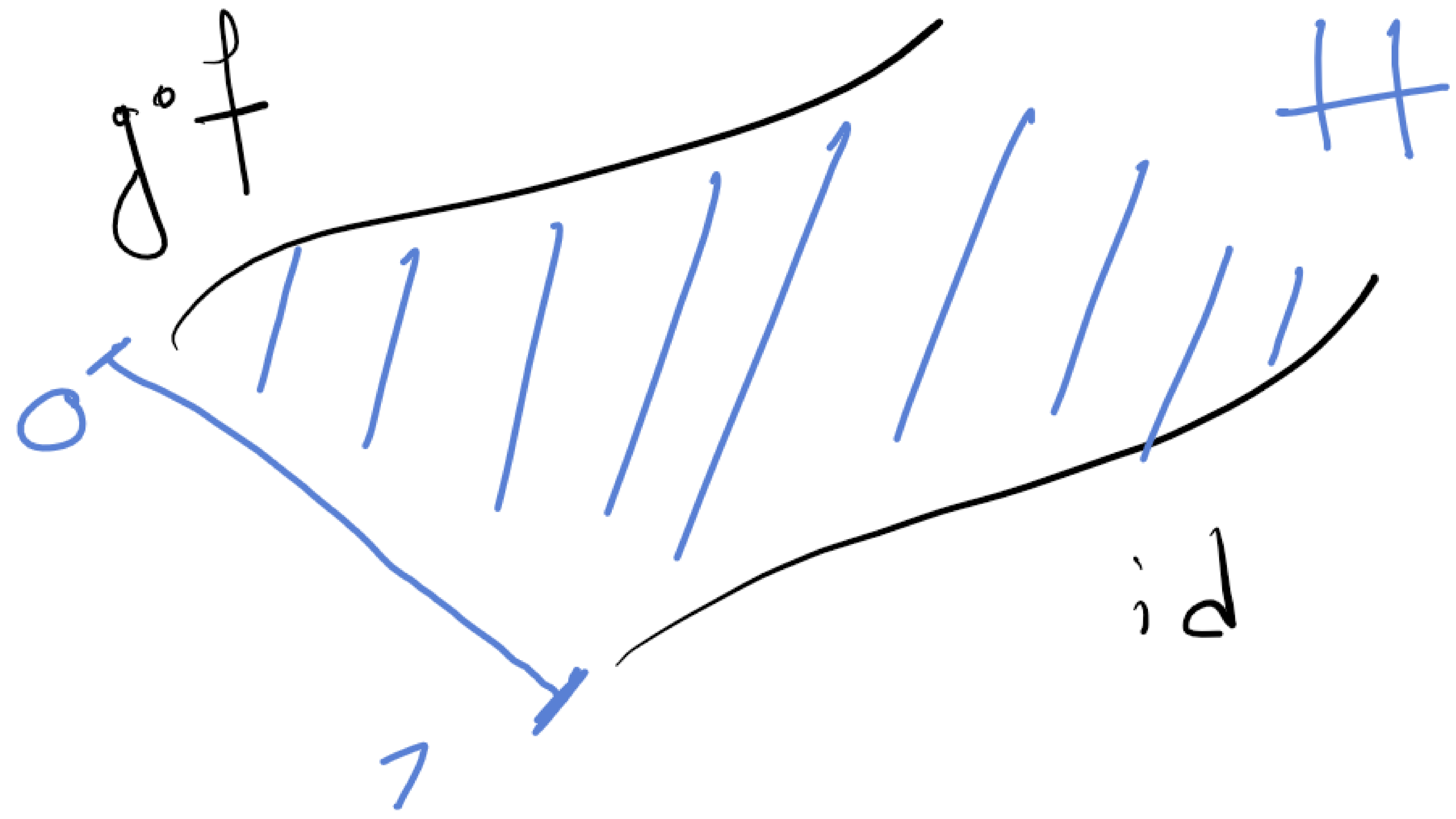
$g \circ f \simeq id_X$

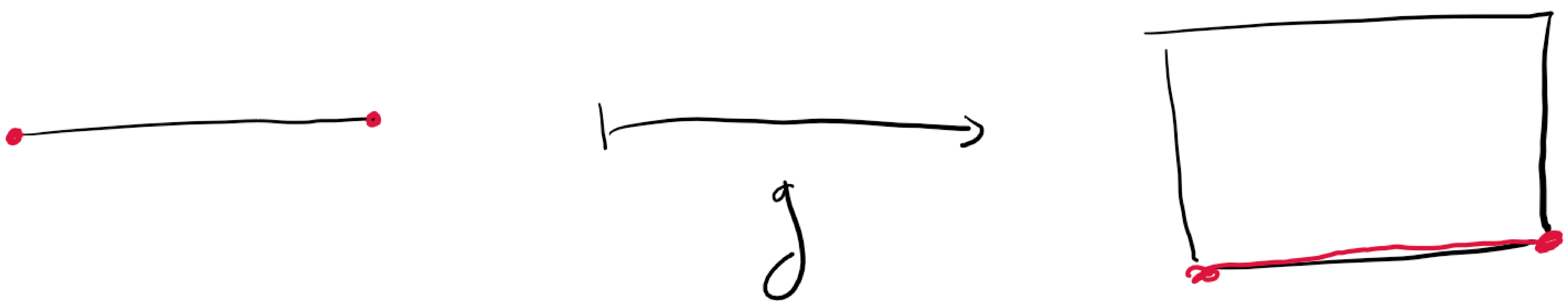
$f \circ g \simeq id_Y$

 $\simeq$

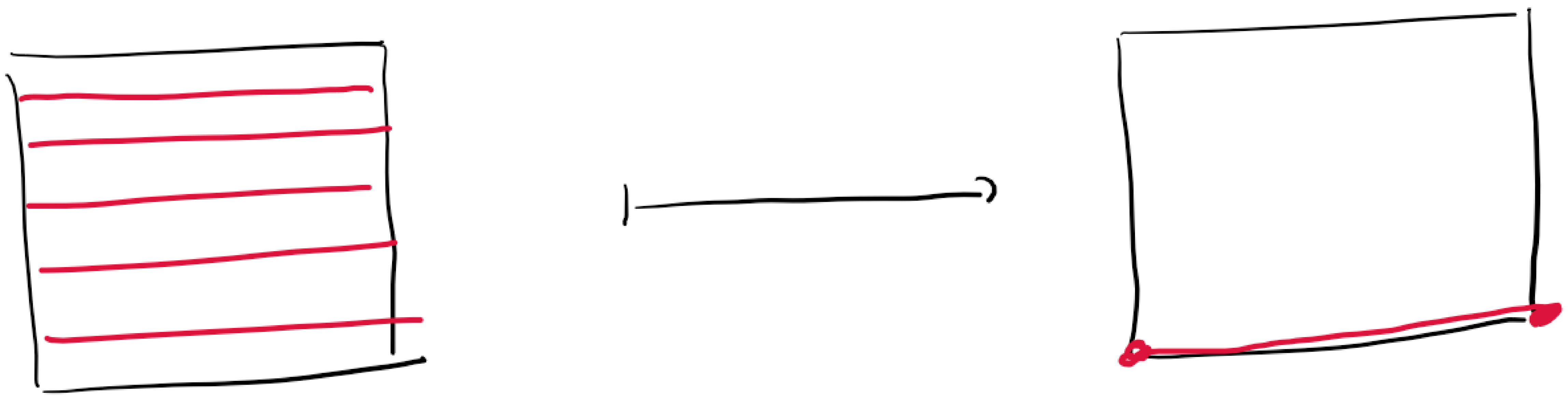
 $\not\simeq$ 

Homotopie : il existe $H : X \times [0,1] \to X$ t.q. $H(0,\cdot) = g \circ f$ et $H(1,\cdot) = id_X$





$g \circ f$:

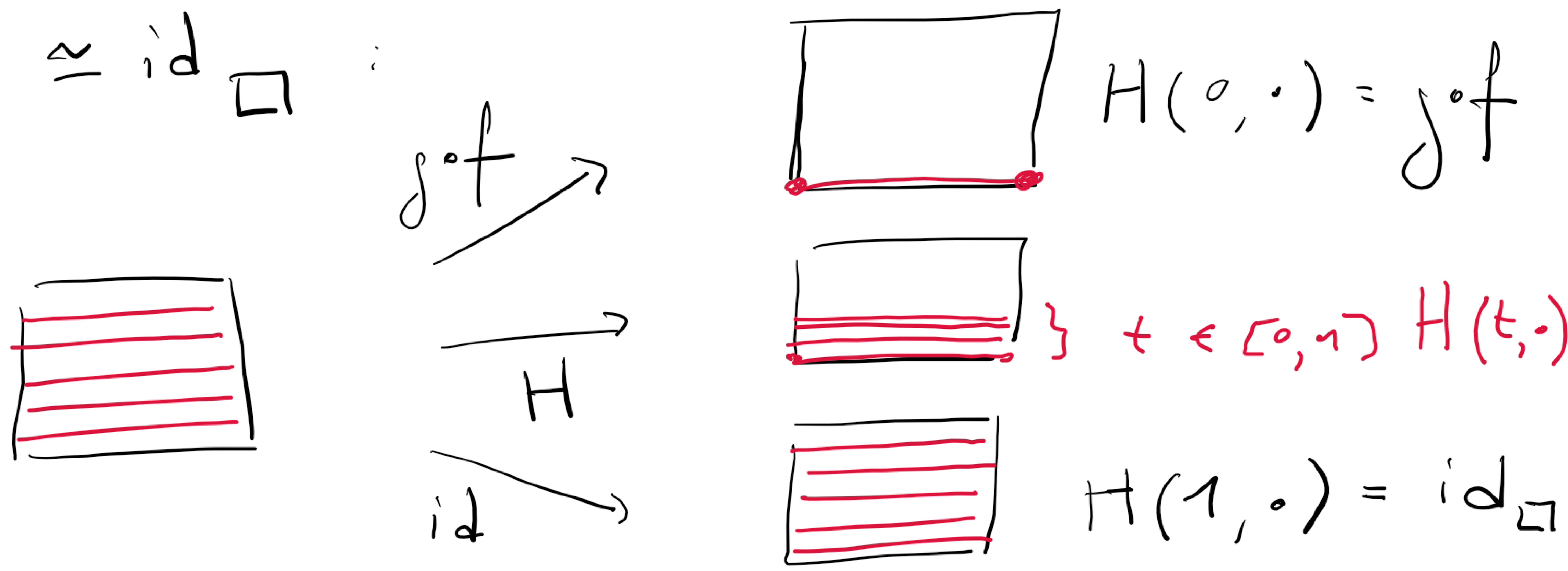


$f \circ g$:

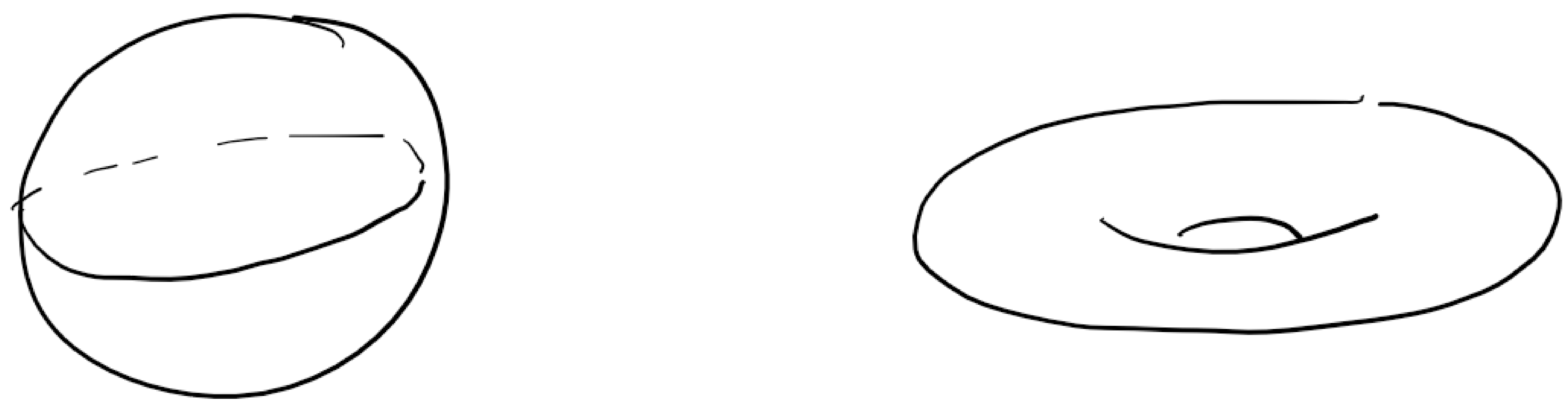
↳ être homotope

$H : [0,1] \times \square \to \square$

$g \circ f \simeq \mathrm{id}_\square$:



• Topologie algébrique : son but est d'associer une str. algébrique (nombre, groupe, anneau, etc.) $q(X)$ à un esp. top. X t.q. si X et Y ont même type d'homotopie, alors $q(X) = q(Y)$.



nombre de trous $q(X)$ 0   1

$q($  $) \neq q($  $)$

donc pas même type d'hom.

• Construire les groupes d'homologie simpliciaux d'un esp. topologique

Bases de théorie des groupes

• Groupe G : un ensemble G muni d'une loi $G \times G \to G$ $(a+b)$ t.q.

- assoc. : $(a+b)+c = a+(b+c)$
- él. neutre : $0 \in G$ t.q. $a+0 = 0+a = a$
- inverse : $\exists\, -a$ t.q. $a+(-a) = -a+a = 0$

Groupe abélien : $a+b = b+a$

Groupe abélien : y penser comme $\mathbb{Z}$

<u>Exemples</u> : $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$a \equiv b \ [n]$ $\qquad a + c = d + b \ [n]$

$c \equiv d \ [n]$

dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $n - 3 + 4$

$= n+1 = 1 \ [n]$

- Groupe quotient : G groupe abélien

$H \subset G$ sous-groupe

$\mapsto$ groupe abélien G/H, groupe quotient.

Cas $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $a = b + k \cdot n$ dans $\mathbb{Z}$

alors $a \equiv b$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

autrement dit : s'il existe $\overset{= k \cdot n}{h} \in n\mathbb{Z}$

t.q. $a \underset{\mathbb{Z}}{=} b + h$ alors $a \underset{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{\equiv} b$.

Pour G/H en général : si $g_1 = g_2 + h$ $h \in H$ dans G

alors $g_1 \equiv g_2$ dans G/H.

Moyen de créer un nouveau groupe à partir de $H \subset G$.

- Groupes abéliens de type fini : un groupe G est de type fini s'il existe $g_1, \dots, g_n \in G$ t.q. $\forall g \in G$ $\exists k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ t.q.

$$g = k_1 g_1 + \dots + k_n g_n .$$

<u>Th</u> Tout groupe abélien de type fini est de la forme

$$G = \underbrace{\mathbb{Z}^{g}}_{\text{libre de rang } g} \times \underbrace{\prod_{\alpha \in A} \mathbb{Z}/p_\alpha^{m_\alpha}\mathbb{Z}}_{\text{partie de torsion}}$$

où p_α premier, $m_\alpha > 0$.

- Groupe abélien libre sur un ensemble : X ensemble, groupe abélien libre sur X est $G = \mathbb{Z}^{|X|}$, notations $[X = \{x_1, \dots, x_n\}]$

$$g = k_1 \cdot x_1 + \dots + k_n \cdot x_n \text{ pour } g = (\underset{x_1}{k_1}, \dots, \underset{x_n}{k_n})$$

Ensemble $X = \{ \square , \triangle \}$ $|X| = 2$

$G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ $(1,0) = \square$

$\quad\;\; \square \quad \triangle$ $(0,1) = \triangle$

$g \in G$ $g = (k_1, k_2)$ $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

$= k_1 (1,0) + k_2 (0,1)$

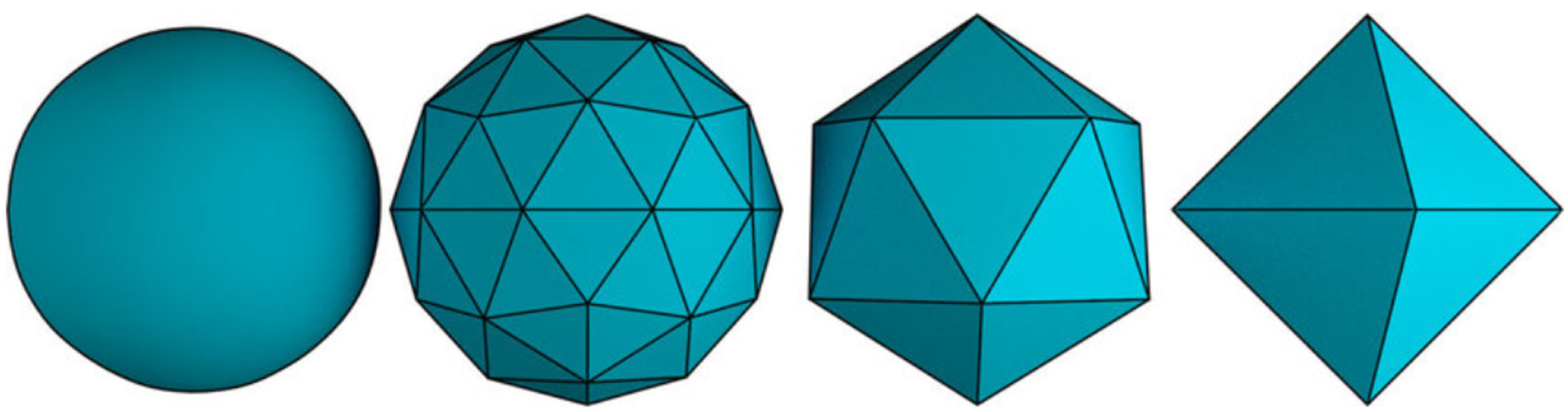
$= k_1 \square + k_2 \triangle$

Polynômes avec $+$: groupe libre sur $(1, X, X^2, \dots, X^n, \dots)$

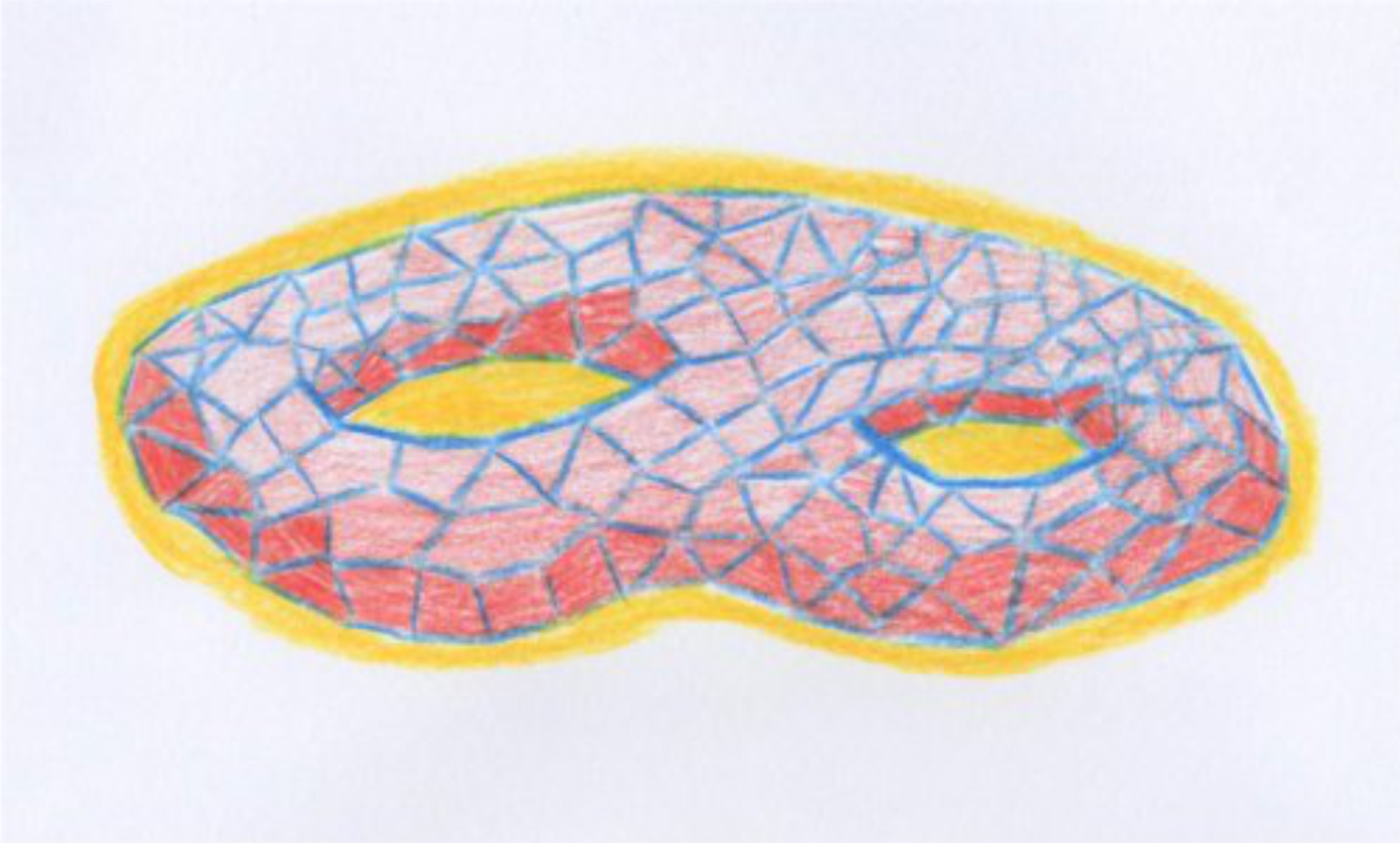
$P(X) = \lambda_n X^n + \dots + \lambda_1 X + \lambda_0$

Surfaces et triangulations / CW-complexes

- Toute variété diff. compacte de dim $= 2$ est triangulable :

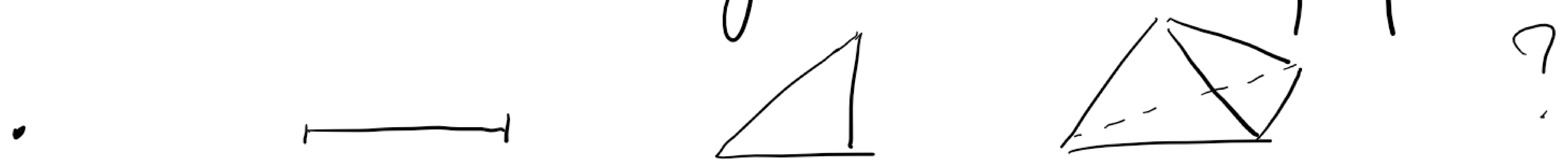


même type d'homéomorphisme



En général, toute var. diff. de dim $= n$ est triangulable

→ Notion de Triangles en dim qcq.



0 1 2 3 ≥ 4

SIMPLEXES STANDARD

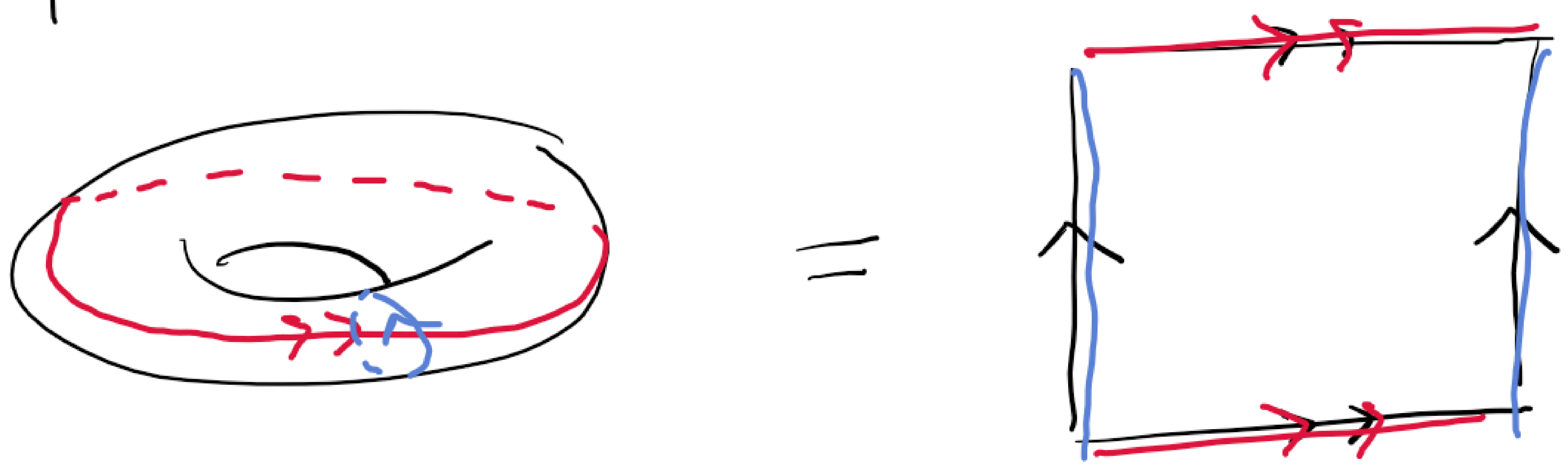
? = défini comme enveloppe convexe de $n+1$ points dans $\mathbb{R}^n$

Triangul : recoller des n-simplexes pour former la variété de dimension n

→ La topologie des var. est d'essence combinatoire donc on peut faire de l'algèbre.

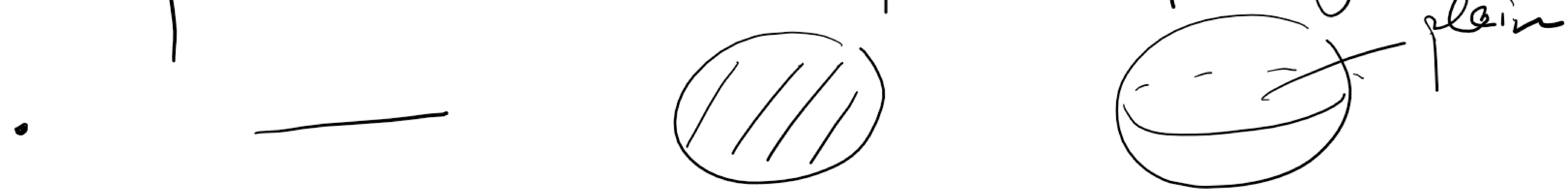
• CW-complexes

Tore :

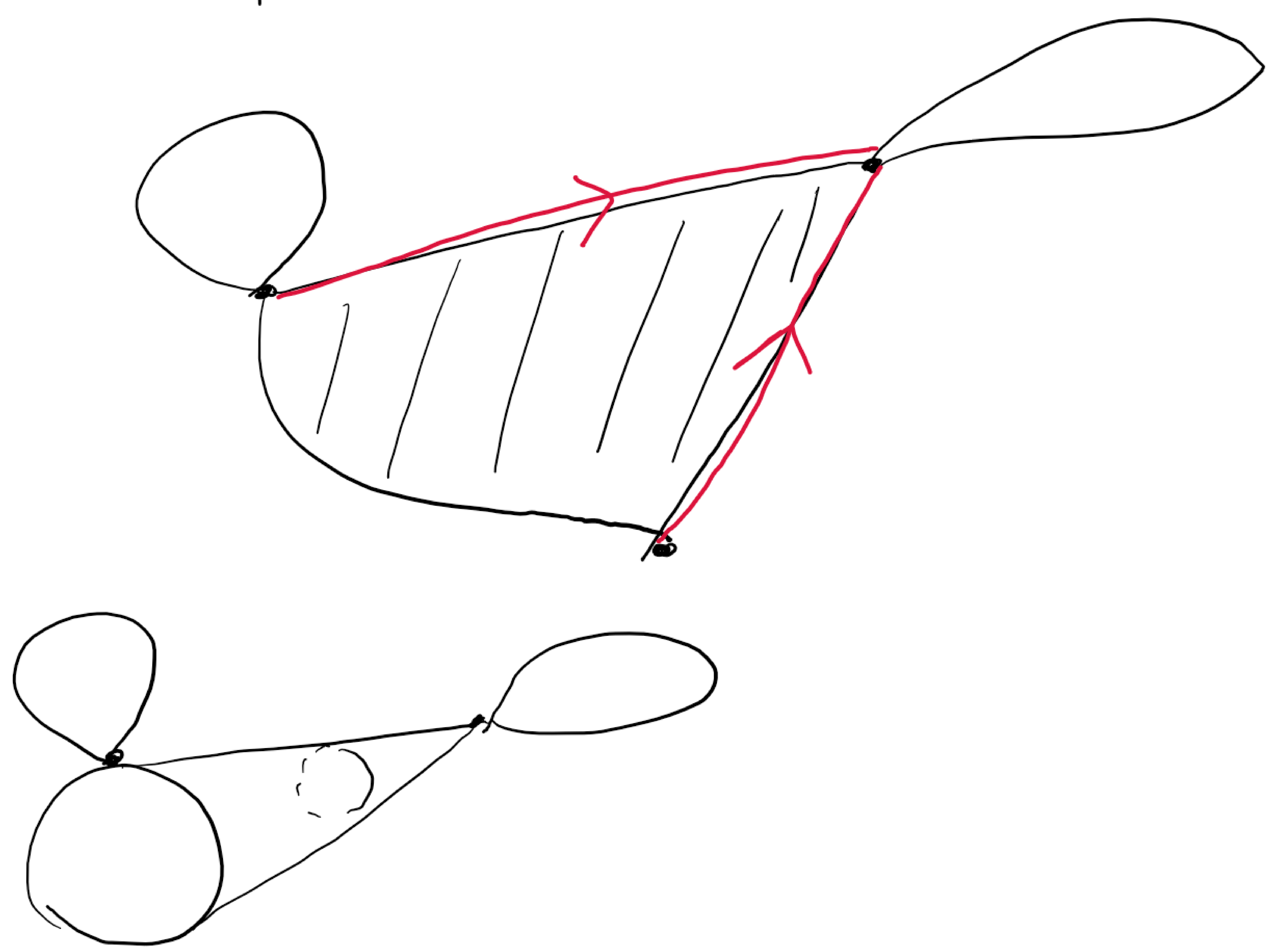


2, 3 trous : idem

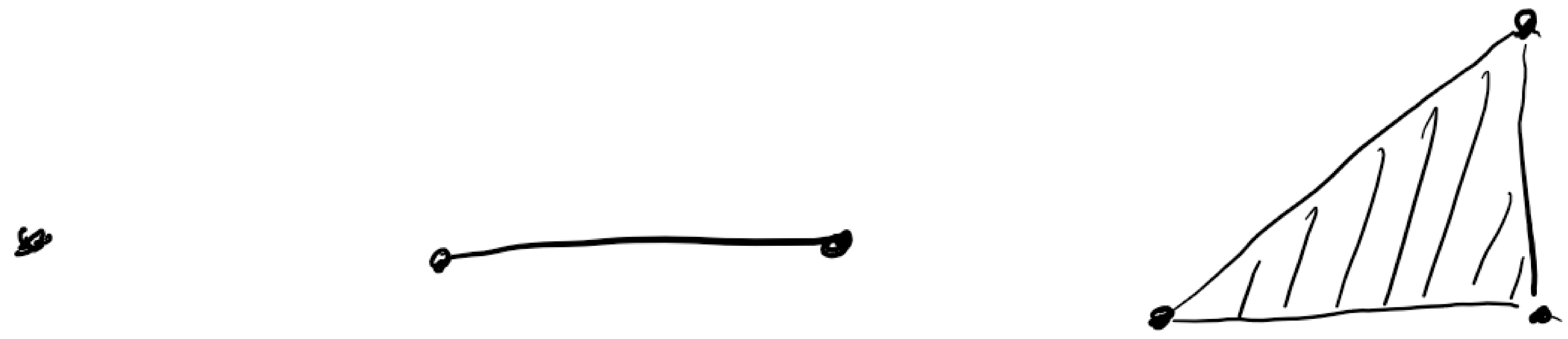
Construire des espaces topologiques en recollant des disques de dim de plus en plus grande :

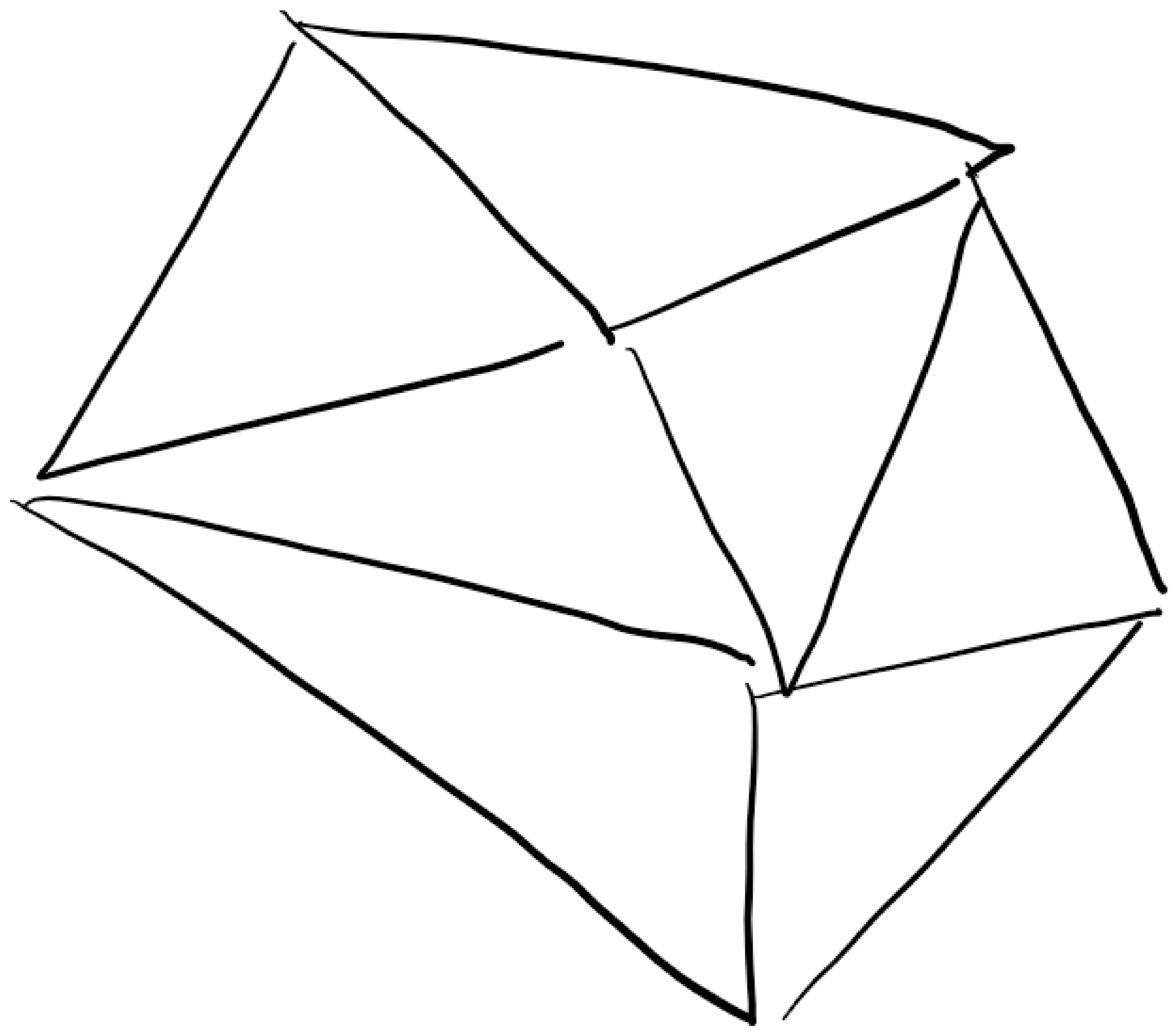


0 disque 1- disque 2- — 3- — —

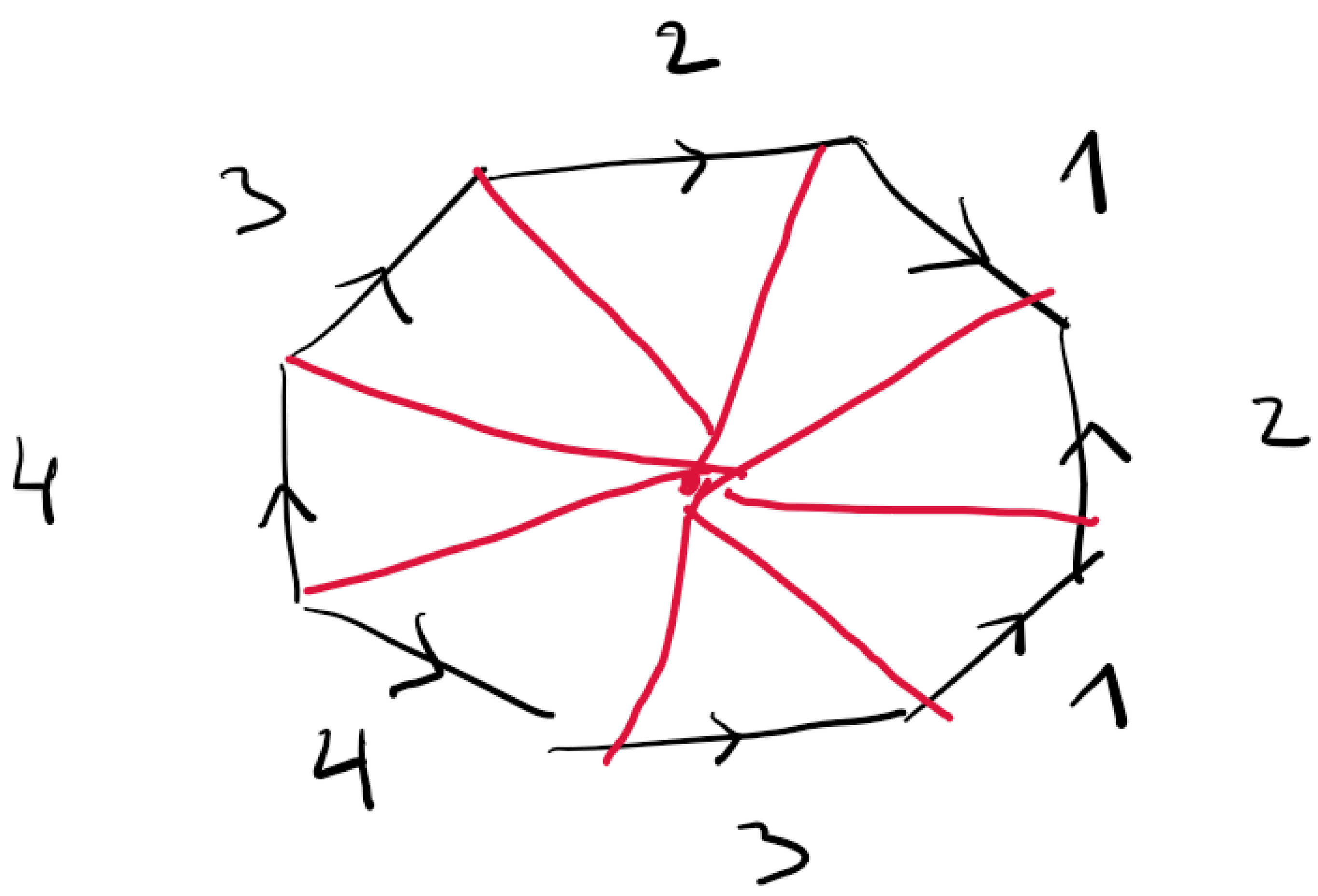


→ Blocs plus généraux que les simplexes pour produire des esp. topologiques.





RIGIDE



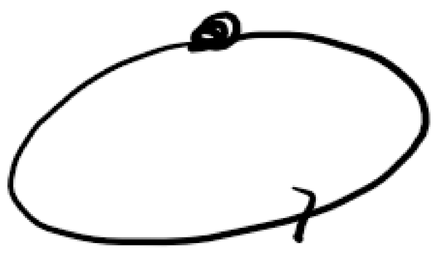
CW-complexe

Homologie simpliciale / cellulaire

• Idée :

- année dernière : étudier les esp. top. à travers les lacets/chemins dans ces esp. top.

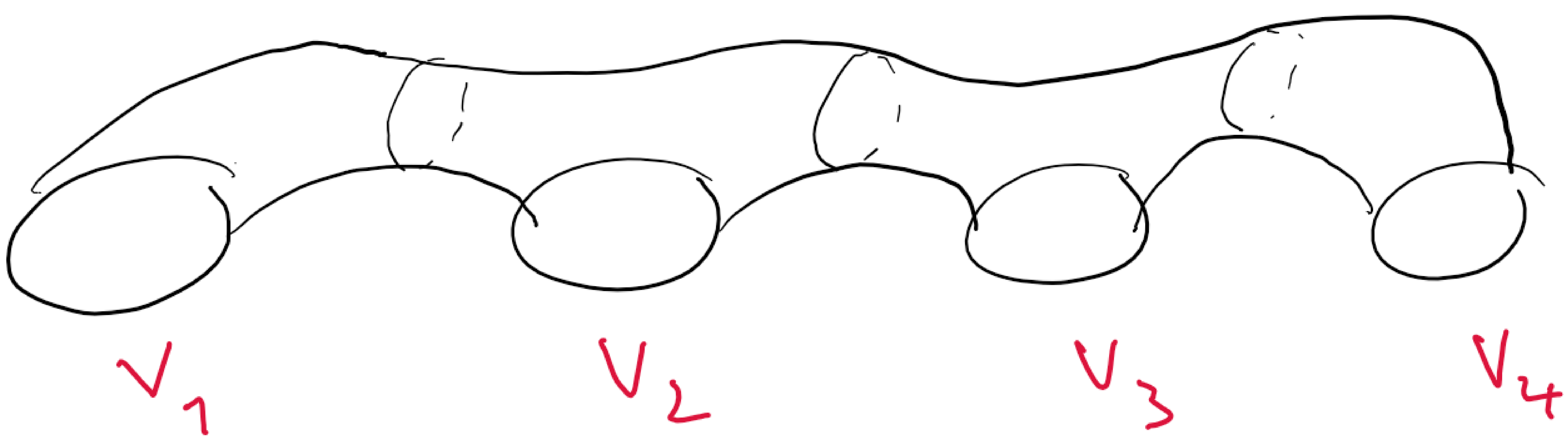
Groupe fondamental $\pi_1(X)$

 lacet dans X

— paradigme de cette année : étudier les var. diff. du point de vue de leur topologie en regardant des rel. de bord sur leurs sous-variétés

dim S = 2

$\underbrace{V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4}_{\text{var. de dim} = 1}$ bord d'une sous-variété de dimension = 2 de S
= 1+1

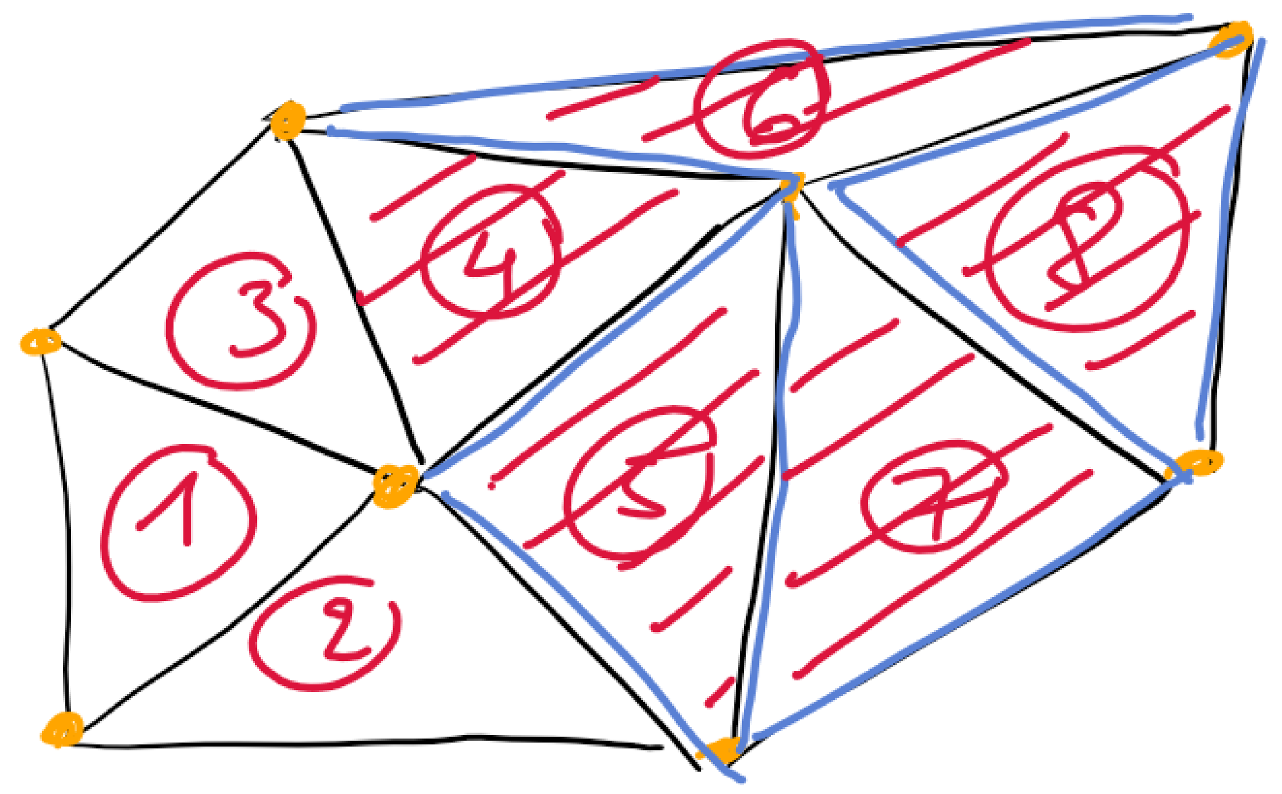


$V_1 \cup V_2$

→ Même idée que triangul/CW-complexes

· Homologie simpliciale :

On considère X une variété avec une triangulation $T = (\underbrace{T_0}_{\text{0-simplexes}}, T_1, \underbrace{T_2}_{\text{2-simplexes}}, \ldots)$



$$C_2 = \mathbb{Z}^8 = \underset{1}{\mathbb{Z}} \times \ldots \times \underset{8}{\mathbb{Z}}$$

$$(X, T) \longmapsto \text{groupes d'homologie}$$

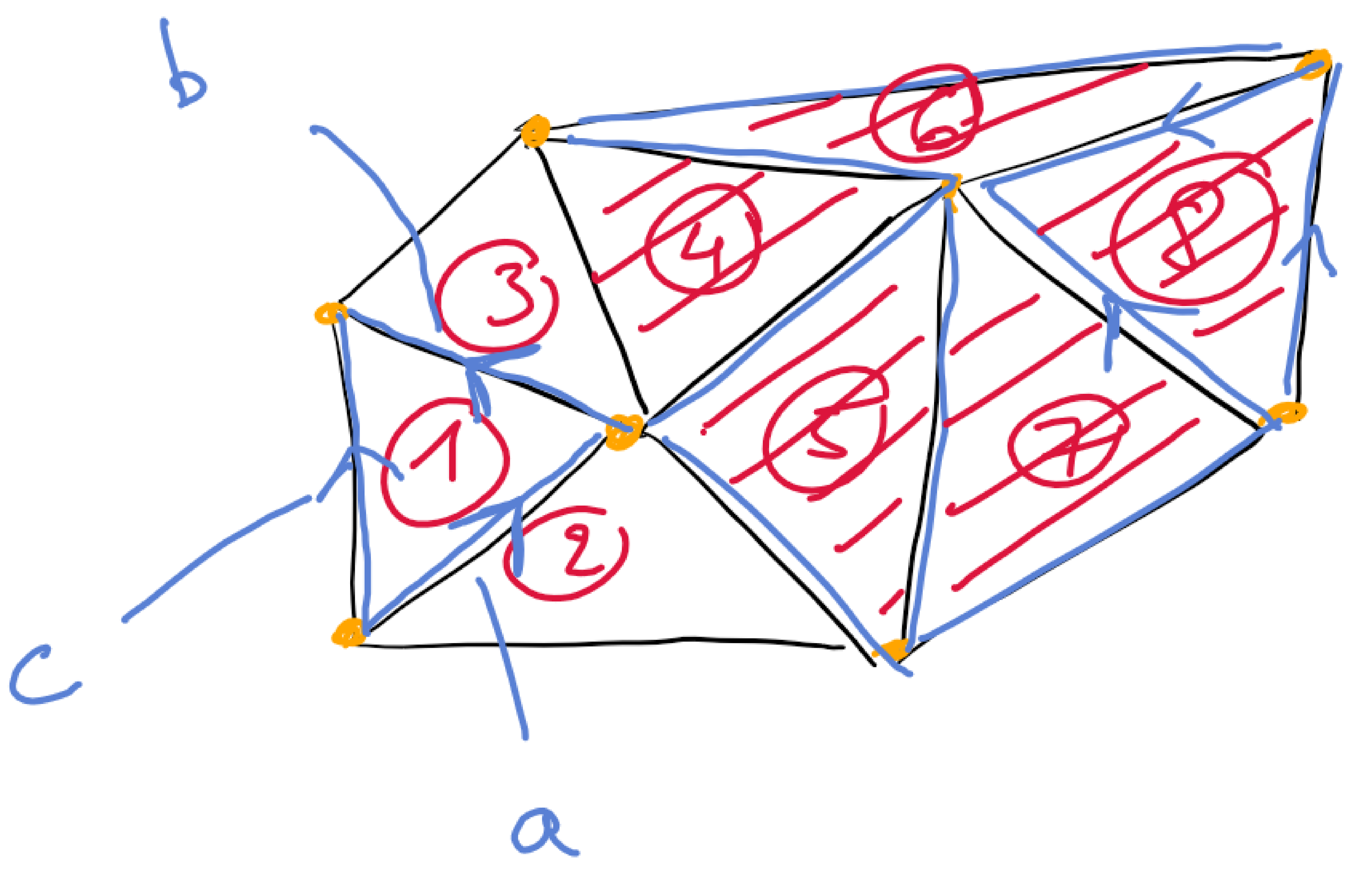
1) $T_i \longmapsto$ groupe libre sur T_i

$$C_i = \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{\text{indicée par les } i\text{-simplexes de } T_i}$$

2) Pour tout i je définis un morphisme de groupes

$$\partial_i : C_i \longrightarrow C_{i-1}$$

il suffit de le faire sur les éléments de T_i



$\partial(1) = a \cup b \cup (-c)$

$C_2 = \mathbb{Z}^8$

$= \underset{1}{\mathbb{Z}} \times \text{---} \times \underset{8}{\mathbb{Z}}$

$\partial_2 : C_2 \longrightarrow C_1 = \underset{a}{\mathbb{Z}} \times \underset{b}{\mathbb{Z}} \times \underset{c}{\mathbb{Z}} \times \cdots$

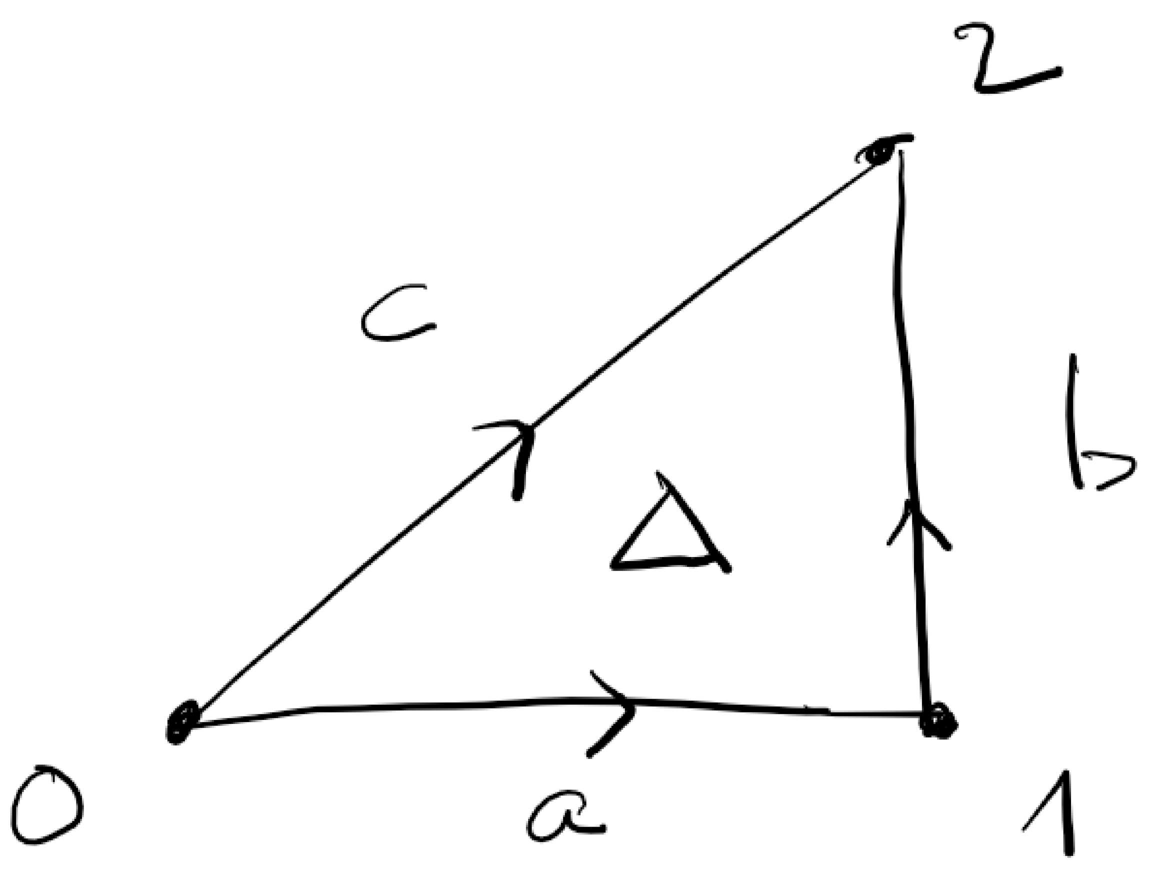
$\partial_2(1) = \cdots$

$\vdots$

$\partial_2(8) = \cdots$

$\partial_2(1) = a + b \underbrace{- c}$

On associe son bord à un triangle de manière alg.



$C_0 = \underset{0}{\mathbb{Z}} \times \underset{1}{\mathbb{Z}} \times \underset{2}{\mathbb{Z}}$

$C_1 = \underset{a}{\mathbb{Z}} \times \underset{b}{\mathbb{Z}} \times \underset{c}{\mathbb{Z}}$

$a = (1,0,0) \quad b = (0,1,0) \quad c = (0,0,1)$

$C_2 = \underset{\triangle}{\mathbb{Z}}$

$\triangle = 1$

$\partial_2 : C_2 \to C_1$

$\partial_2(\triangle)$

$= \partial_2(1)$

$= (1,0,0) + (0,1,0) - (0,0,1)$

$= a + b - c$

$\partial_1 : C_1 \to C_0 \quad \partial_1(a) \underline{=} 1 - 0.$

C_i = groupe libre sur les i-simplexes de la triangul.

on choisit δ_i un i-simplexe

$$\partial_i : C_i \longrightarrow C_{i-1}$$

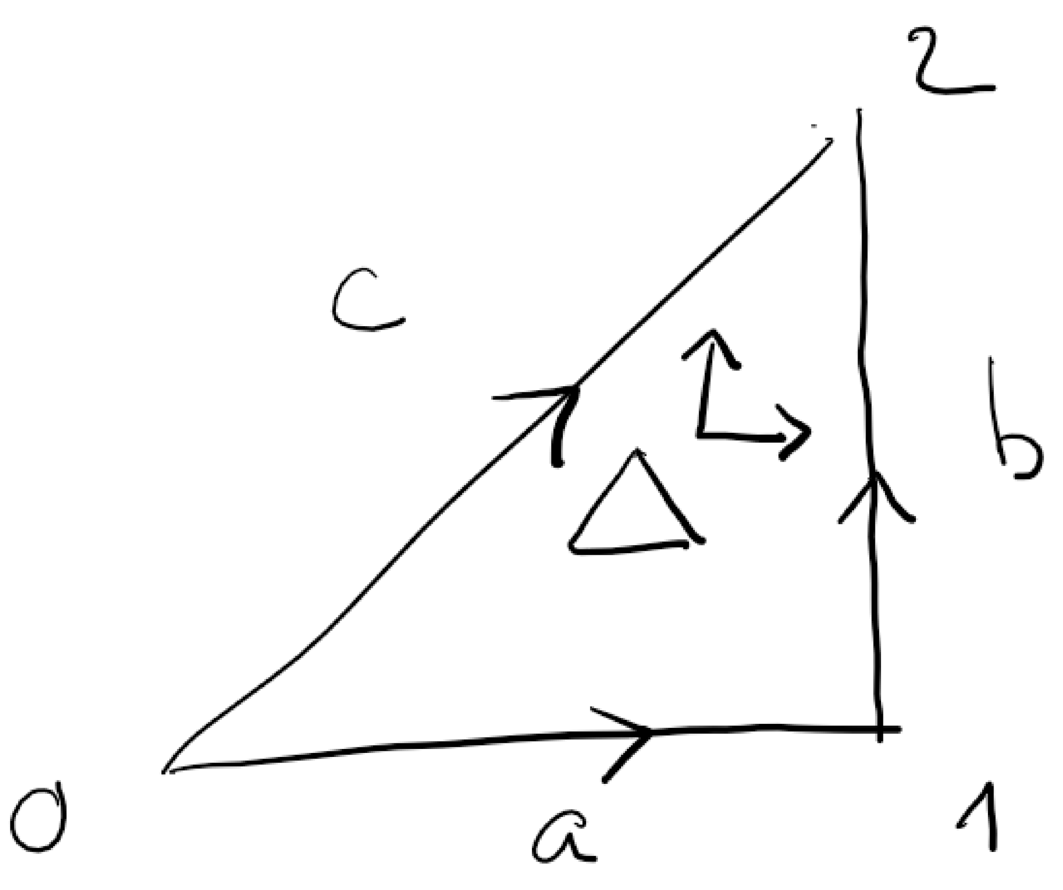
$$\partial_i(\delta_i) = \sum \pm \left[(i-1)\text{-simplexe dans le bord de } \delta_i \right]$$

X dimension n :

$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0$$

3) Th : $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$

$$\begin{tikzcd} C_{i+1} \arrow[r, "\partial_{i+1}"] \arrow[rr, bend right, "= 0"'] & C_i \arrow[r, "\partial_i"] & C_{i-1} \end{tikzcd}$$



$\partial_2(\Delta) = a + b - c$

$\partial_1(a) = \cancel{1} - \cancel{0}$

$\partial_1(b) = \cancel{2} - \cancel{1}$

$\partial_1(c) = \cancel{2} - \cancel{0}$

4)

$$\begin{tikzcd} C_{i+1} \arrow[r, "\partial_{i+1}"] \arrow[dr, "\partial_{i+1}"'] & C_i \arrow[r, "\partial_i"] & C_{i-1} \\ & \operatorname{Im}\partial_{i+1} \arrow[u, phantom, "\cup"] & \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\operatorname{Ker}\partial_i \subset C_i} \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1}$$

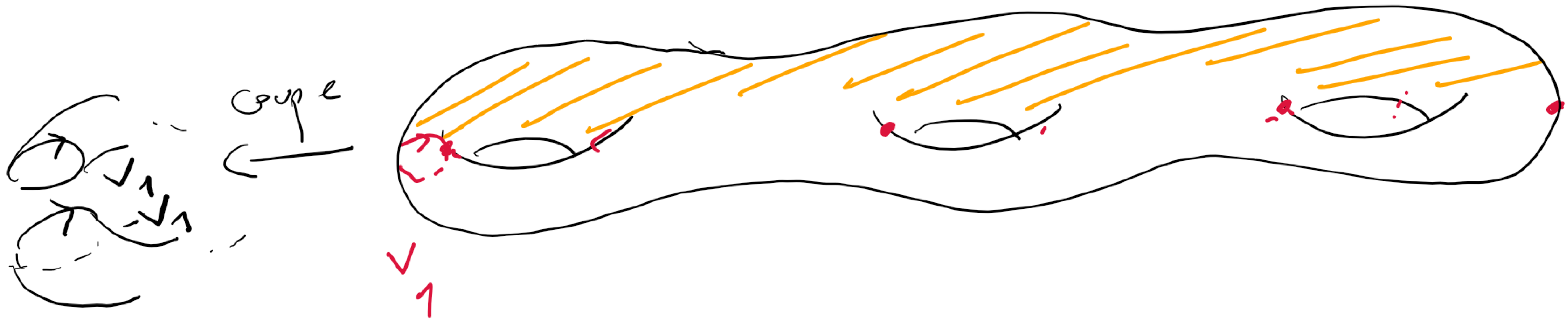
Thm : $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0 \implies \operatorname{Im}\partial_{i+1} \subset \operatorname{Ker}\partial_i$

5) Groupes d'homologie simpl associés à X :

$$H_i(X) = \operatorname{Ker}\partial_i \big/ \operatorname{Im}\partial_{i+1}$$

$$a = b + \partial_{i+1}(x) \qquad a, b \in \operatorname{Ker}\partial$$

$$\implies a \equiv b$$



$v_1, v_2, v_3, v_4 \in \operatorname{Ker}\partial_1$

$\operatorname{Ker}\partial_1 \ni v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0 + \partial_2 \Big($  $\Big)$

$\equiv 0 \in H_1(X) = \operatorname{Ker}\partial_1 / \operatorname{Im}\partial_2$

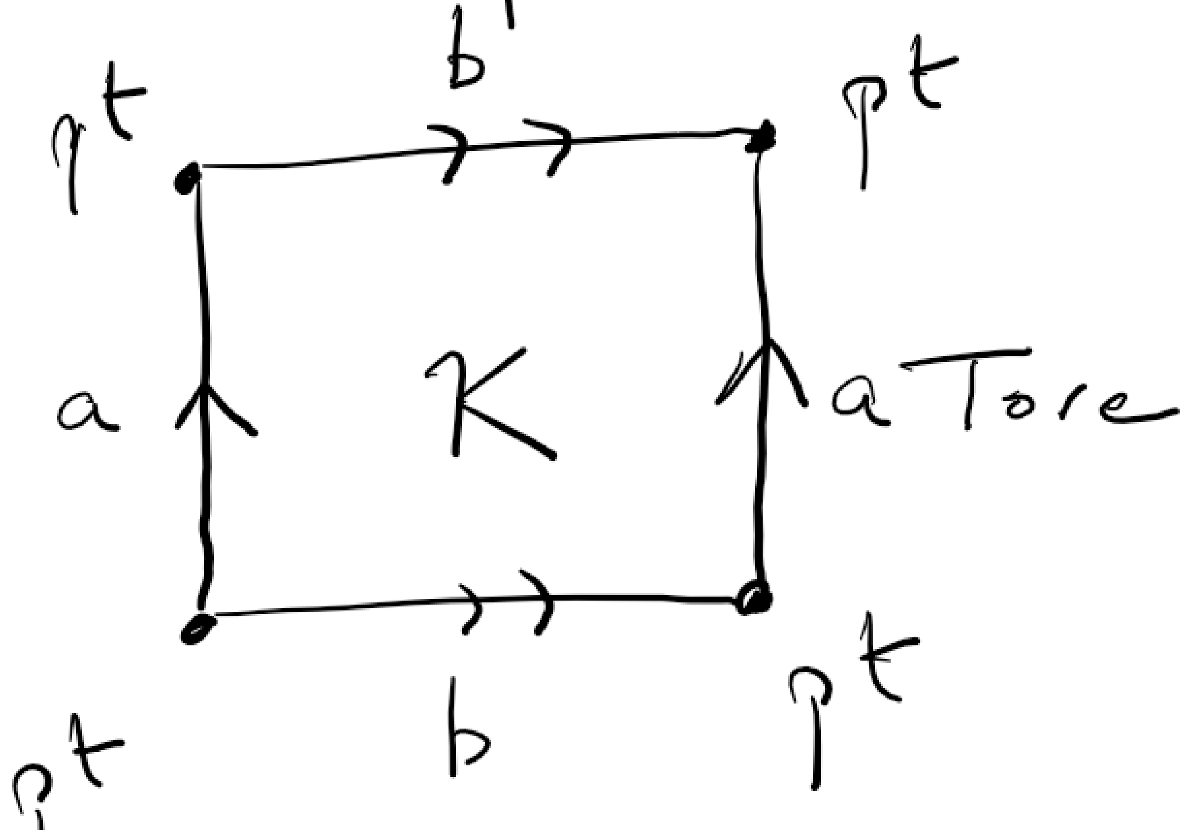
• Propriétés :

a) $\{H_i(X)\}_{0 \leq i \leq n}$ sont indép. du choix de triangulation.

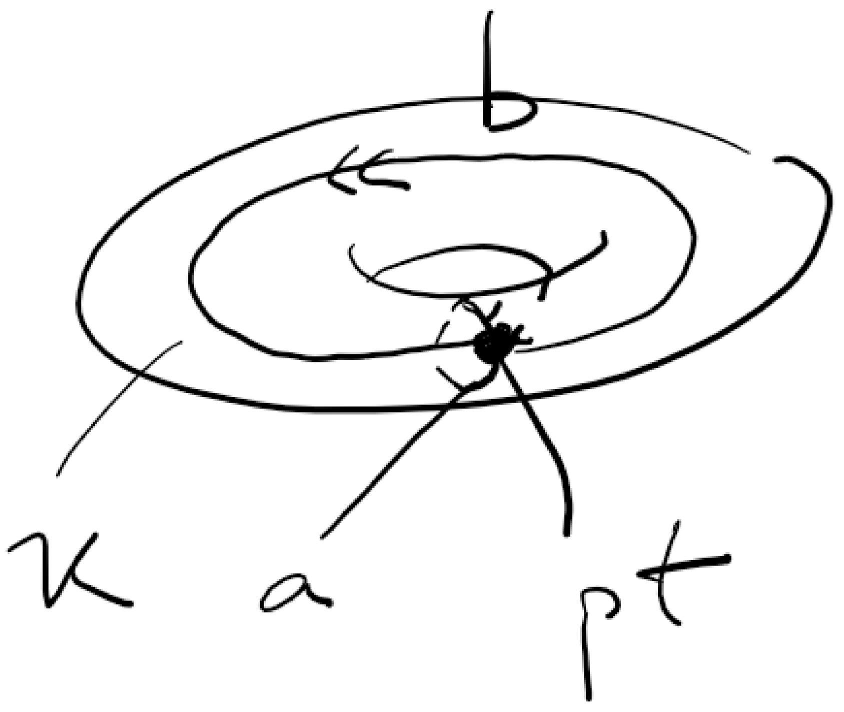
b) Si X et Y ont même type d'hom. alors $H_i(X) \underset{\text{iso de gr.}}{\simeq} H_i(Y)$ $\forall i$.

c) On peut faire pareil avec les cellules d'un CW-complexe.

Exemple :



Tore



$$\underset{K}{C_2 = \mathbb{Z}} \qquad C_1 = \underset{a}{\mathbb{Z}} \times \underset{b}{\mathbb{Z}} \qquad C_0 = \underset{pt}{\mathbb{Z}}$$

C_i = groupe libre sur les i-cellules

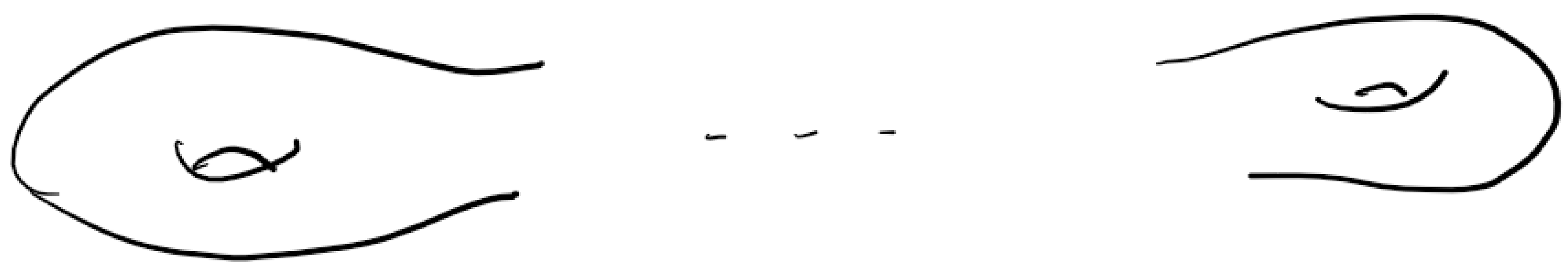
$$\partial_2 K = b + a - b - a = 0$$
$$\partial_1 a = pt - pt = 0$$
$$\partial_1 b = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 = \mathbb{Z} \\ H_1 = \mathbb{Z}^2 \\ H_2 = \mathbb{Z} \end{array}}$$

Homologie cellulaire $H_i^{cell}(X)$

$$\simeq H_i^{simpl}(X)$$

d) Pour le tore à g trous S_g

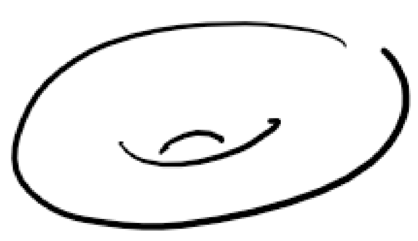


g trous

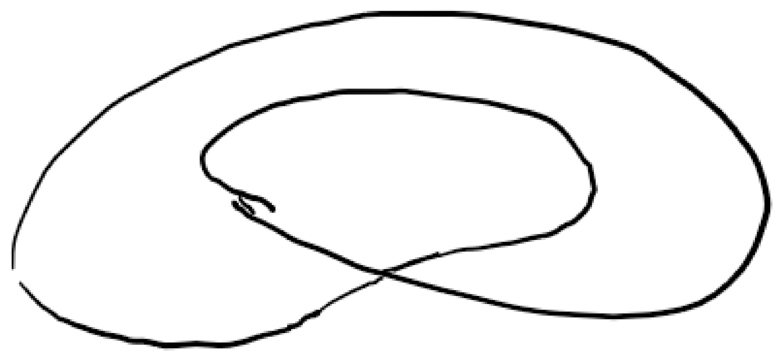
$$H_1(S_g) = \mathbb{Z}^{2g} \qquad 2g/2 = g$$

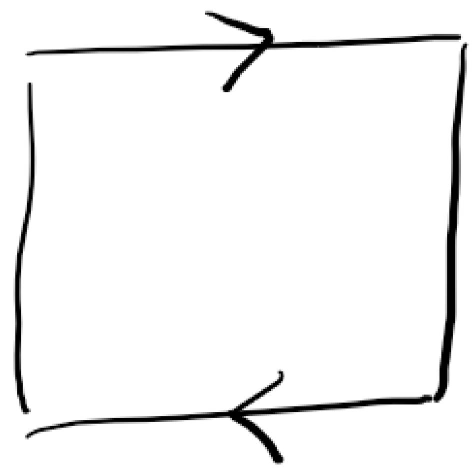
donc pour $g_1 \neq g_2$, $H_1(S_{g_1}) \not\simeq H_1(S_{g_2})$

donc le nombre de trous est invariant par homotopie.

e) $\pi_1\Big($  $\Big) = \mathbb{Z}^2$

Exemple : ruban de Möbius





$$H_1(\text{möbius}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

f) $H^i(X)$ $\qquad C^i \xrightarrow[\delta_i]{} C^{i+1}$

$H^0(X) \oplus \cdots \oplus H^n(X)$ anneau

g) $\pi_1(X) \longrightarrow H_1(X)$ morph. de groupe

pas abélien en général

$\boxed{\text{Hurewicz}}$

$$H_1(X) = \pi_1(X)^{ab}$$