

1 Introduction

Les analogues hydrodynamiques, et plus généralement la physique des analogues, consiste à émuler un système physique par un autre. Au cœur de ce procédé se trouve en général la reconnaissance de similitudes dans les équations régissant l'un et l'autre système. L'objectif de cette présentation est de présenter un analogue formel entre électromagnétisme et hydrodynamique et de présenter une correspondance entre l'effet Aharonov-Bohm et une expérience hydrodynamique. On finit ensuite par quelques explications qualitatives sur des analogues de cosmologie et une modification des équations de Maxwell proposée à partir d'idées hydrodynamiques. Une bibliographie contenant les articles est disponible à la fin du texte. Les articles dont sont tirées les idées présentées sont rappelés au début de chaque section.

2 Analogie formelle hydrodynamique-électromagnétisme

Articles : [1, 2, 3, 4]

On propose de présenter des analogies formelles entre l'hydrodynamique et les équations de l'électromagnétisme. Il est intéressant de mentionner que Maxwell lui-même avait des inspirations "hydrodynamiques" pour écrire cette théorie. Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \times \vec{E} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho / \epsilon_0 \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{J}\end{aligned}\tag{1}$$

Ces équations portent sur les 6 composantes des champs électriques et magnétiques. Les deux premières équations montrent que toutes les composantes de \vec{E} et \vec{B} ne sont pas indépendantes. On peut introduire les champs potentiels V et \vec{A} . Les équations de Maxwell se réécrivent alors

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho / \epsilon_0 \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{J}\end{aligned}\tag{2}$$

Les équations constitutives de la mécanique des fluides pour un fluide in-

compressible sont la conservation de la masse et l'équation d'Euler

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P\end{aligned}\quad (3)$$

avec \vec{u} le champ de vitesse. On définit la vorticité comme le vecteur

$$\vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad (4)$$

En utilisant la formule d'analyse vectorielle $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} u^2 - \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})$, on transforme l'équation d'Euler en

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{w} \times \vec{u} - \vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \quad (5)$$

On définit alors le vecteur de Lamb $\vec{L} = \vec{w} \times \vec{u}$ et le potentiel $\Phi = \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2}$. On obtient quatre équations de la mécanique des fluides

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= -\vec{L} - \vec{\nabla} \Phi \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{w} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \times \vec{L}\end{aligned}\quad (6)$$

Les deux dernières équations sont obtenues en prenant le rotationnel des équations sur la vitesse. On peut alors observer des symétries formelles. Par exemple, la deuxième équation suggère la correspondance $\vec{L} \leftrightarrow \vec{E}$, $\Phi \leftrightarrow V$ et $\vec{u} \leftrightarrow \vec{A}$. On peut alors continuer l'analogie en remarquant que $\vec{w} \leftrightarrow \vec{B}$. Pour que l'analogie soit complète, on a besoin des équations sur les dérivées de \vec{L} . On commence par prendre la divergence de (5) et on obtient

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{L} = -\Delta \Phi \quad (7)$$

D'après l'analogie, la densité hydrodynamique de charge est donc la quantité $n = \Delta \Phi$. Cela est d'autant plus pertinent qu'en électromagnétisme, on a $\rho/\epsilon_0 = -\Delta V$ (en se plaçant dans la jauge de Coulomb assurant $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$) et que V est l'analogue de Φ .

Il nous manque donc une dernière équation qui devrait être en utilisant le principe de correspondance

$$\frac{\partial \vec{L}}{\partial t} = c^2 \vec{\nabla} \times \vec{w} - \vec{I} \quad (8)$$

Il est possible d'établir formellement cette équation (en changeant c^2 par u^2 , la définition de \vec{I} étant un peu longue) mais on ne s'en servira pas ici, voir [Marmanis, 2000] pour les détails.

Electromagnétisme	V	\vec{A}	\vec{B}	\vec{E}	$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \Delta V$
Hydrodynamique	$\Phi = \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2}$	\vec{u}	$\vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$	$\vec{L} = \vec{w} \times \vec{u}$	$n = \Delta \Phi$

Une petite remarque sur l'analogie entre \vec{u} et \vec{A} . L'incompressibilité du flot s'écrit $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ qui est l'équivalent de la jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. On peut donc interpréter \vec{A} comme une quantité de mouvement par unité de charge. Cela est cohérent avec la formule $\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$ de mécanique analytique pour une particule chargée, ou avec le 4-vecteur (V, \vec{A}) qu'on peut comparer à la quadri-impulsion (E, \vec{p}) en relativité. Le potentiel V est une quantité d'énergie par unité de charge et \vec{A} serait donc l'impulsion associée. Cependant, cela semble contradictoire avec le fait que \vec{A} n'est pas défini de manière unique mais seulement à une symétrie de jauge près. Cela signifie par exemple que \vec{p} sera conservé dans une certaine jauge mais pas dans une autre. Il faudra donc faire le bon choix de jauge selon la situation pour obtenir une quantité conservée. Voir [4] pour plus de détails sur le sujet.

3 Analogie de l'effet Aharonov-Bohm

Articles : [5, 6]

Afin de donner du sens physique à tout cela, on propose de décrire un analogue hydrodynamique de l'effet Aharonov-Bohm.

3.1 L'effet Aharonov-Bohm quantique

Classiquement, on considère que seuls les champs \vec{E} et \vec{B} ont un sens physique, le potentiel vecteur \vec{A} n'étant qu'un artifice de calcul. L'effet Aharonov-Bohm est un exemple de l'existence "physique" du potentiel vecteur apparaissant en mécanique quantique. Considérons la situation où l'on veut faire une expérience d'interférences à 2 fentes avec un électron. On place entre les 2 fentes un solénoïde produisant un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{z}$ uniforme à l'intérieur et nul à l'extérieur. Le flux du champ magnétique à travers le solénoïde est noté $\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$. Le potentiel vecteur \vec{A} n'est pas nul à l'extérieur de la bobine. En prenant pour des raisons de symétrie $\vec{A} = A_\theta(r) \vec{e}_\theta$ on obtient en intégrant sur un cercle C de rayon R extérieur au solénoïde

$$2\pi R A_\theta(R) = \int_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \phi \quad (9)$$

et donc on obtient le potentiel vecteur

$$\vec{A}(r) = \frac{\phi}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad (10)$$

On s'intéresse maintenant à une particule placée sur un cercle à l'extérieur de ce solénoïde dans une petite boîte centrée en \vec{X} . La boîte est supposée assez

petite et assez loin pour que \vec{A} soit uniforme dans la boîte. Le Lagrangien de la particule est

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{X}) + qV(\vec{x} - \vec{X}) \quad (11)$$

On en déduit l'impulsion et l'Hamiltonien de la particule

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} - q\vec{A}(\vec{X}) \\ H &= \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - L = \frac{(\vec{p} + q\vec{A}(\vec{X}))^2}{2m} - qV(\vec{x} - \vec{X}) \end{aligned} \quad (12)$$

Quitte à redéfinir le potentiel $\vec{A} \rightarrow \vec{A} - \vec{A}(\vec{X}_0)$ on suppose \vec{A} nul dans la boîte à la position initiale \vec{X}_0 . On prend alors l'état fondamental de la particule $\psi(\vec{x} - \vec{X}_0)$. Si on bouge maintenant la boîte, le champ \vec{A} va varier. On montre que la fonction d'onde

$$\psi(\vec{x} - \vec{X}) = \exp\left(-\frac{iq}{\hbar} \int_{\vec{X}_0}^{\vec{X}} \vec{A}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}'\right) \psi(\vec{x} - \vec{X}_0) \quad (13)$$

est alors solution du nouvel Hamiltonien (la dérivation permet d'annuler le terme en $\vec{A}(\vec{X})$). En faisant faire un tour à la particule à partir de \vec{X}_0 selon un contour C, on obtient une différence de phase entre les deux fonctions d'onde

$$\psi(\vec{x} - \vec{X}_0) \rightarrow \exp\left(-\frac{iq}{\hbar} \int_C \vec{A}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}'\right) \psi(\vec{x} - \vec{X}_0) = e^{-2i\pi\alpha} \psi(\vec{x} - \vec{X}_0) \quad (14)$$

avec le paramètre de flux

$$\alpha = \frac{q\phi}{h} \quad (15)$$

Cette différence de phase est observable par un décalage des franges d'interférence lorsque le flux ϕ est varié : c'est l'effet Aharonov-Bohm. Cet effet est présent même si le champ magnétique est nul partout sur la trajectoire. On en donne maintenant une interprétation hydrodynamique en utilisant ce qui précède.

3.2 Analogie hydrodynamique

Pour trouver un analogue formel à l'effet d'Aharonov Bohm, on peut utiliser le principe de correspondance établi précédemment. On se place donc dans un écoulement de vorticité \vec{w} nulle sauf dans une petite région de l'espace où elle est constante. On peut par exemple considérer $\vec{w} = w_0\delta(\vec{x})\vec{z}$ qui correspond à la modélisation ponctuelle d'un tourbillon. Le champ de vitesse $\vec{w} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ s'écrit alors en utilisant le théorème de Stokes sur un cercle de rayon r (et en supposant $u = u(r)\vec{e}_\theta$)

$$\int \vec{u} \cdot d\vec{l} = 2\pi r u(r) = \int \vec{w} \cdot d\vec{S} = w_0 \quad (16)$$

et donc

$$\vec{u} = \frac{w_0}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad (17)$$

On peut donc interpréter le champ magnétique comme un vecteur tourbillon et l'analogie du potentiel vecteur \vec{A} est alors simplement la vitesse du fluide. La vorticité de cet écoulement est bien nulle partout sauf en $r = 0$. Par ailleurs, on peut vérifier qu'un tel champ de vitesse est à divergence nulle (ce qui se voit géométriquement). Expérimentalement, un tourbillon est formé en perçant un trou au fond d'une cuve percée (comme dans un lavabo par exemple).

Trouver un analogue quantique d'une particule peut sembler difficile. Cependant, l'effet Aharonov-Bohm est avant tout un effet d'interférence et devrait donc pouvoir être reproduit avec des ondes classiques. Ces expériences ont été effectuées et les résultats sont reproduits ci-dessous. En envoyant des ondes sur un vortex, la différence de phase entre les deux ondes sortantes dépend de la circulation de la vitesse $\int \vec{u} \cdot d\vec{l}$ le long du chemin de propagation. Cette circulation change de signe selon que l'on passe au-dessus ou en-dessous du vortex. D'après les prédictions de mécanique quantique, la différence de phase sur un tour complet est $\int_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$

On peut pousser plus loin l'analogie avec la mécanique quantique. On considère tout d'abord le milieu au repos dont la relation de dispersion est donnée par $\omega(\vec{k})$. Supposons maintenant que le fluide présente un écoulement $\vec{u}(\vec{r})$. Dans le référentiel mouvant, la relation de dispersion est modifiée comme

$$\omega'(\vec{k}) = \omega(\vec{k}) - \vec{k} \cdot \vec{u}(\vec{r}) \quad (18)$$

Pour s'en convaincre, on peut regarder la différence de phase de l'onde entre deux instants et deux endroits de l'espace réduit à une dimension. Celle-ci s'écrit $\phi = \int (kdx - \omega dt)$. Pour passer d'un référentiel à l'autre, on écrit $dx' = dx + udt$ et $dt' = dt$ si bien que $\phi = \int (kdx' - (\omega - ku)dt')$. Cette relation traduit simplement l'effet Doppler d'une source (ou d'un observateur) en mouvement.

La pulsation est en fait l'analogie de l'Hamiltonien pour les ondes (les états propres d'un Hamiltonien évoluent en $e^{-iE/\hbar t}$ ce qui ressemble bien à une pulsation). Au premier ordre en \vec{A} , l'Hamiltonien quantique se réécrit

$$H = H_0 + \frac{q}{2m} \vec{p} \cdot \vec{A} \quad (19)$$

avec $H_0 = p^2/2m$ l'Hamiltonien sans champ magnétique. On voit ici l'analogie formelle entre la pulsation et l'Hamiltonien (\vec{A} étant l'analogie de la vitesse du fluide et \vec{p}/\hbar associé en mécanique quantique à un vecteur d'onde). On peut être encore plus formel et écrire

$$\begin{aligned} H(\vec{p}) &= H_0(\vec{p} + q\vec{A}) \\ \omega'(\vec{k}) &\approx \omega\left(\vec{k} - \frac{k\vec{u}}{v_g}\right) \end{aligned} \quad (20)$$

avec $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ la vitesse de groupe. Ceci est valable tant que $u/v_g \ll 1$ c'est-à-dire tant que l'écoulement du fluide est faible devant la vitesse des ondes. A noter

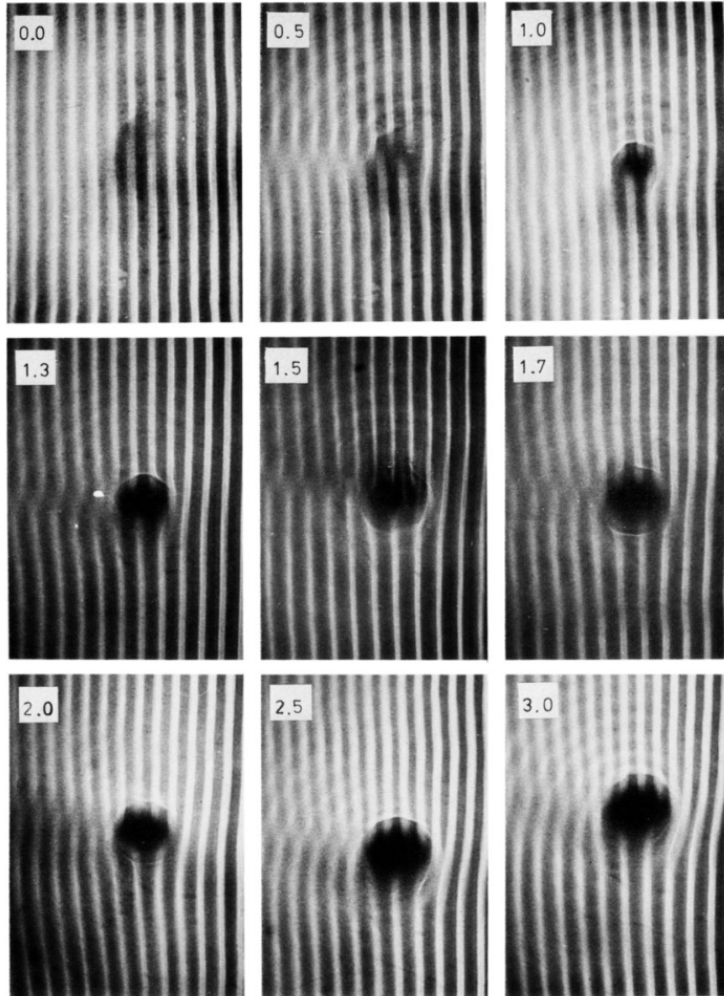


Figure 4 Water wave crests passing an irrotational vortex, giving rise to different strengths of wavefront dislocation. Waves are incident from the right and the water is circulating clockwise. Estimated values of the flux parameter α are indicated.

Figure 1: Effet Aharonov-Bohm pour des ondes à la surface de l'eau. Un vortex est généré au centre et le paramètre de flux est varié pour observer différents types de dislocations. Les ondes viennent de la droite et le fluide tourne dans le sens horaire. Extrait de [6].

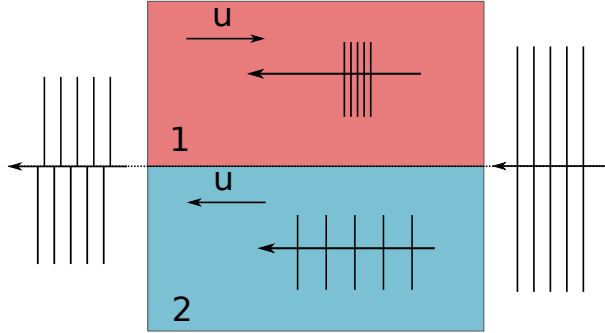


Figure 2: Modélisation simplifiée de l'expérience de M. Berry. On peut calculer le déphasage par effet Doppler dans chacun des deux chemins.

qu'on utilise dans l'expression précédente l'égalité $\vec{v}_g = v_g \vec{k}/k$ ou autrement dit le fait que la vitesse de groupe soit colinéaire à \vec{k} .

On observe donc une analogie formelle entre les quantités $\frac{q\vec{A}}{\hbar}$ en quantique et $\frac{-\vec{k}\cdot\vec{u}}{v_g}$ en hydrodynamique. Le facteur \hbar vient du fait que $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. On s'attend donc par analogie à une différence de phase $2\pi\alpha$ avec le paramètre de flux

$$\alpha = -\frac{k}{2\pi v_g} \int \vec{u}(\vec{r})\cdot\vec{d}r \quad (21)$$

On peut régler ce paramètre expérimentalement en changeant la force du vortex ou la fréquence de l'onde. Les observations pour différentes valeur de α sont reproduites figure 1.

On peut dériver directement le facteur α pour des ondes. On se limite au cas où on a 2 régions de l'espace avec une vitesse u constante positive ou négative. Un front d'onde initial se comporte différemment selon le chemin emprunté (voir figure 2). L'onde initiale a un vecteur d'onde k et une fréquence ω . En rentrant dans un milieu en mouvement, la pulsation est modifiée en $\omega' = \omega \pm ku$. Le vecteur d'onde est modifié par effet Doppler en

$$\Delta k = \frac{\partial k}{\partial \omega'} \Delta \omega = \pm \frac{ku}{v_g} \quad (22)$$

Sur une distance D , la différence de phase entre les deux chemins est

$$\Delta\phi = 2\Delta k D = 2\frac{ku}{v_g} D = \frac{k}{v_g} \int \vec{u}\cdot\vec{d}l \quad (23)$$

On retrouve bien le résultat annoncé. Ce raisonnement peut-être étendu à n'importe quel écoulement.

4 Analogues pour la relativité générale

Articles : [7, 8, 9]

La propagation d'un champ scalaire ψ dans un espace courbé de métrique $g_{\mu\nu}$ est donnée par

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \Psi = 0 \quad (24)$$

avec ∇ la dérivée covariante. On peut réécrire cette équation avec des dérivées partielles sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Psi) = 0 \quad (25)$$

Afin de créer un analogue en laboratoire, on a besoin d'un champ scalaire obéissant à la même équation pour lequel on pourrait identifier $g^{\mu\nu}$. Cela a par exemple été fait pour des ondes acoustiques se propageant à la vitesse c dans un fluide en mouvement avec une vitesse \vec{v} . La métrique équivalente est alors

$$g_{\mu\nu} = \frac{\rho}{c} \begin{bmatrix} -(c^2 - v^2) & -\vec{v} \\ -\vec{v} & I_3 \end{bmatrix} \quad (26)$$

On reconnaît notamment une signature $(-+++)$ comme attendu. Lorsque la composante g_{tt} change de signe, on parle d'ergosphère pour un trou noir en rotation. Cela correspond à la région de l'espace où les particules doivent tourner dans le même sens que le trou noir. Cela se produit dans notre métrique analogue lorsque $v > c$. Dans ce cas, les ondes acoustiques ne peuvent plus aller contre le sens du flot puisque celui-ci devient trop rapide.

On peut implémenter un phénomène similaire avec des ondes hydrodynamiques. L'analogie peut-être trouvée en détail dans la littérature, on se contente d'une description simple. Les ondes de gravité dans un bac de profondeur h ont pour relation de dispersion

$$\omega^2 = \tanh(kh) gk \quad (27)$$

Dans la limite des grandes longueurs d'ondes ($kh \ll 1$) on obtient

$$\omega = \sqrt{gh} k \quad (28)$$

tandis que les ondes de longueur d'onde suffisamment faibles ne ressentent pas l'effet de la profondeur

$$\omega = \sqrt{gk} \quad (29)$$

Que se passe-t-il dans un fluide en mouvement ? On a déjà établi la relation d'effet Doppler et dans le référentiel du labo, la fréquence et le vecteur d'onde sont donnés par

$$\omega = \omega'(k) + ku \quad (30)$$

avec $\omega'(k)$ donné par les relations de dispersion précédentes. On peut résoudre graphiquement ce problème (voir figure 3). Pour une vitesse de flot u assez faible, on obtient 3 solutions mais une seule à une vitesse de groupe positive et sera donc lancée par le shaker. Les ondes remontent ensuite le long du courant dont la vitesse augmente. Sur la relation de dispersion, les deux points associés à $k > 0$ se rapprochent jusqu'à fusionner lorsque $u = v_g$. On observe alors

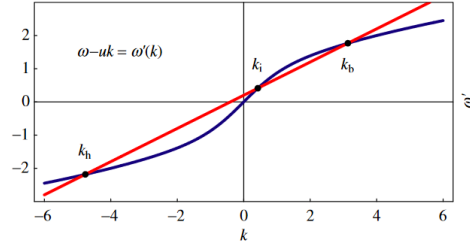


Figure 5. Doppler formula (2) versus dispersion relation (4) for ω' plotted in arbitrary units. The wavenumber k_i describes the incident wave, k_b the blue-shifted and k_h the Hawking wave with negative wavenumber k and negative frequency ω' .

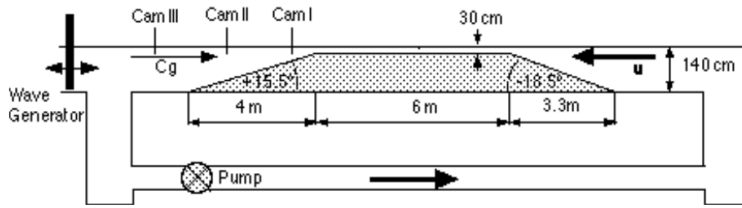


Figure 6. Schematic diagram of the experiment.

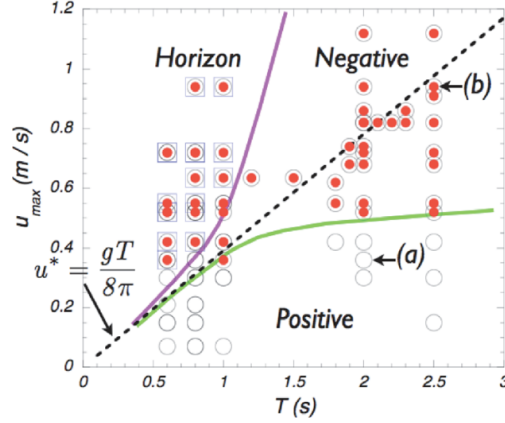


Figure 7. Phase diagram of our experiment. Each circle corresponds to a run with wave period $T = 2\pi/\omega$ and maximal flow speed u_{\max} . The dots indicate runs where we observed negative-frequency waves, the squares run with horizons. In regimes without horizons, we saw a transition to mode conversion into purely positive frequencies below the lower green line in the diagram. The points (a) and (b) indicate the parameters used in figure 8.

Figure 3: Extrait de [7]

un blocage des ondes à cet endroit. En relativité, il est prévu que dans ces conditions une conversion ait lieu vers les fréquences négatives. Ces fréquences négatives ont été observées expérimentalement uniquement lorsque la vitesse du flot dépassait une certaine valeur comme attendu.

5 Viscosité et équations de Maxwell

Articles : [2, 3]

En ajoutant la viscosité dans les équations de mécanique des fluides ($\nu\Delta\vec{w}$ dans Euler), les analogues de Maxwell deviennent

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{L} &= n \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{w} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \times \vec{L} - \nu \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{w} \\ \frac{\partial \vec{L}}{\partial t} &= u^2 \vec{\nabla} \times \vec{w} - \vec{I} + \nu \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{L}\end{aligned}\tag{31}$$

On peut alors grâce au principe de correspondance introduire des équations de Maxwell pour un "éther visqueux"

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho/\epsilon_0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \times \vec{E} - \alpha \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{J} + \alpha \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E}\end{aligned}\tag{32}$$

Il existe encore \vec{A} tel que $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ et la troisième équation de Maxwell se réécrit

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{E} - \vec{\nabla} V - \alpha \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}\tag{33}$$

et l'équation de propagation du potentiel vecteur devient

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{J} + \alpha^2 \Delta^2 \vec{A}\tag{34}$$

Localement, on peut montrer que \vec{A} et \vec{J} sont alignés et on écrit donc $\vec{J} = \beta^2 c^2 \vec{A}$. En passant l'équation précédente en Fourier, on obtient

$$\omega^2 = c^2(k^2 + \beta^2) - \alpha^2 k^4\tag{35}$$

Il reste à trouver une estimée de α (dont l'unité est m^2/s comme une viscosité classique). On s'attend à ce que les effets visqueux se manifestent à petite échelle et on postule donc $\alpha = \hbar$ par "unité de masse d'Ether" (\hbar est en $kg.m^2/s$). Dans ces conditions, on distingue deux régimes selon la valeur du paramètre $\eta = \hbar^2 k^2 / c^2$:

- Si $\eta \ll 1$, on a
$$\omega^2 = c^2(k^2 + \beta^2) \tag{36}$$

- Si $\eta \ll 1$, on a
$$\omega^2 = -h^2 k^4 \tag{37}$$

On reconnaît les équations de Dirac et Schrödinger en version Fourier, suggérant peut-être un lien entre fonction d'onde et potentiel vecteur.

6 Références

- 1 On the analogy between electromagnetism and turbulent hydrodynamics, Haralambos Marmanis
- 2 Les équations de Maxwell sont-elles incomplètes ?, Germain Rousseaux
- 3 Turbulence, electromagnetism and quantum mechanics: A common perspective, Haralambos Marmanis
- 4 Thoughts on the magnetic vector potential, Semon M.D.
- 5 The Quantum Hall Effect, D. Tong
- 6 Wavefront dislocations in the Aharonov-Bohm effect and its water wave analogue, M V Berry, R G Chambers, M D Large, C Upstill and J C Walmsley
- 7 Observation of negative-frequency waves in a water tank: a classical analogue to the Hawking effect? Germain Rousseaux, Christian Mathis, Philippe Maïssa, Thomas G Philbin and Ulf Leonhardt
- 8 Acoustic black holes: horizons, ergospheres and Hawking radiation, Matt Visser
- 9 Gravity wave analogues of black holes, R. Schutzhold, W. Unruh