Introduction à la théorie des noeuds

Thibaut Mazuir

IMJ-PRG - Sorbonne Université

30 juillet 2020

Le but de l'exposé est double.

Donner à la fois une introduction au vaste domaine des maths qu'on appelle la topologie algébrique, puis l'appliquer sur un exemple simple en expliquant quelques éléments de théorie des noeuds.

Premier temps : histoire et philosophie de la topologie algébrique, puis illustration à travers l'exemple du groupe fondamental d'un espace topologique.

Second temps : définitions et exemples de base de théorie des noeuds, et finalement construction de l'invariant total de noeud qu'est le groupe de noeud !

La topologie algébrique peut-être définie comme l'étude de la topologie des espaces par des moyens algébriques.

Si le terme algébrique est généralement clair pour un mathématicien ou un physicien, comment définir la topologie ?

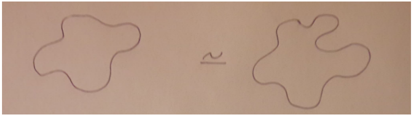
Exposé de Marc cette semaine : introduction à la *géométrie différentielle*

Objets d'études : les variétés, qui sont des espaces venant avec des données géométriques (vecteurs, angles, plan tangent)

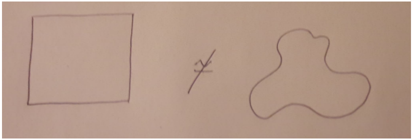
En fonction des infos qu'on retient et qu'on ajoute éventuellement à la variété, on a différentes géométries : différentielle (celle de base), hyperbolique, riemannienne, etc.

Pour un type de géométrie fixé, quand est-ce que deux variétés M et N sont équivalentes et en quel sens ? On dira qu'elles sont équivalentes si on peut déformer une variété en l'autre en conservant les quantités géométriques venant avec la variété.

Par exemple, il y a équivalence ici



mais pas là



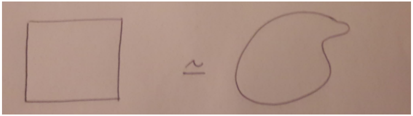
Le procédé permettant de passer de l'une à l'autre, ou plutôt l'application $f : M \to N$, est alors appelée un *difféomorphisme*.

Exposé d'aujourd'hui : on passe du paradigme de la géométrie à celui de la *topologie*

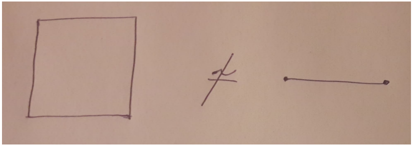
Objets d'études : les espaces topologiques, qui sont des espaces venant avec des données moins fines que celles des variétés (exemple pas de notion d'angles ou de distance)

Le but de la topologie est cette fois de classer les espaces topologiques à *homéomorphisme* près, là où avant on parlait de difféomorphisme

Sans donner de définition rigoureuse d'un homéomorphisme ou d'un espace topologique, on a par exemple, que



mais pas que

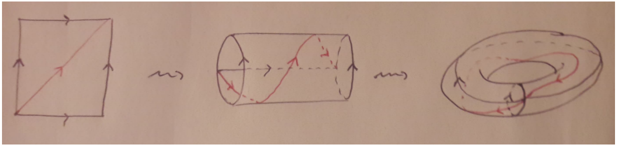


Un homéomorphisme, c'est donc grosso modo s'autoriser toutes les déformations imaginables de l'espace qui ne diminuent pas sa dimension.

La topologie, c'est donc une espèce de géométrie plus grossière, où seule demeure l'idée de déformations, et où les angles et les distances ont disparu.

On a défini la topologie algébrique comme l'étude de la topologie par des moyens algébriques. Mais pourquoi voudrait-on faire cela ?

On s'est rendus compte au début du siècle dernier (Poincaré notamment) que toutes les surfaces (orientables), sont triangulables, càd peuvent être quadrillées par des triangles.



Vidéo : `http://analysis-situs.math.cnrs.fr/Classification-des-surfaces-triangulees-par-reduction-a-une html`

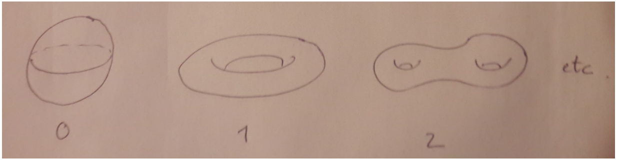
L'étude de la topologie des surfaces orientables est donc d'essence combinatoire : il suffit de comprendre combinatoirement comment recoller des triangles pour obtenir toutes les surfaces orientables possibles.

Et qui dit combinatoire dit naturellement algèbre !

Plus précisément, le but de la topologie algébrique est d'associer des quantités algébriques calculables $q(X)$ aux espaces topologiques X, qui permettent de les différencier entre eux.

On les construit de telle sorte que lorsque X et Y sont homéomorphes, $q(X) = q(Y)$. Si on arrive alors à prouver que $q(X) \neq q(Y)$ pour deux espaces topologiques, on saura alors que X et Y ne peuvent être homéomorphes.

L'exemple (un peu tautologique) de base est celui du nombre de trous d'un tore :



Le nombre $g \in \mathbb{N}$ de trous permet donc de différencier les tores entre eux, en ce sens c'est une quantité algébrique qui les distingue et les classifie.

Evidemment, la plupart des invariants de topologie algébrique sont beaucoup moins naïfs. On va introduire maintenant le plus basique d'entre eux : le groupe fondamental $\pi_1(X)$ associé à un espace topologique X.

On notera que l'algèbre moderne s'est développée en lien intime avec la topologie algébrique.

Le langage moderne des mathématiques (celui de la théorie des catégories), mais également certaines constructions fondatrices dans des domaines en apparence déconnectés (exemple de l'algèbre homologique en géométrie algébrique), ont été introduits dans le cadre de travaux partant de questionnements de topologie algébrique.

Le groupe fondamental qu'on s'apprête à définir est un *groupe*.

Qu'est-ce que c'est ?

Un groupe c'est la donnée d'un ensemble d'éléments G, muni d'une loi de composition $* : G \times G \to G$ que l'on appellera son addition/sa multiplication selon le contexte, ainsi que d'un élément distingué $e \in G$ tels que

(i) la loi de composition est associative, càd $a * (b * c) = (a * b) * c$;

(ii) e est un unité pour $*$, i.e. $e * a = a * e = a$ pour tout $a \in G$;

(iii) chaque élément admet un inverse, càd pour tout a il existe un élément $a^{-1} \in G$ tel que $a * a^{-1} = e$.

L'exemple canonique est celui des entiers relatifs $\mathbb{Z}$: je peux additionner deux entiers relatifs, et ce dans n'importe quel ordre (associativité) ; l'élément neutre pour l'addition est 0 ; chaque entier relatif n admet un opposé $-n$.

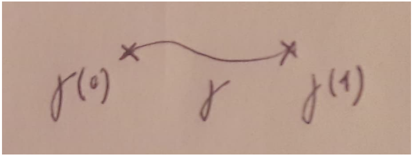
La définition général d'un groupe, c'est donc simplement une définition généraliste de cette structure qui existe sur $\mathbb{Z}$.

Nous allons utiliser les *chemins* d'un espace topologique X pour définir son groupe fondamental.

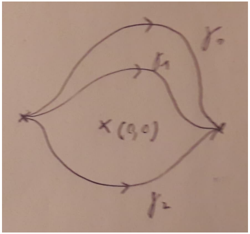
Un chemin dans X est simplement défini comme une application continue

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow X \ .$$

Les points $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ sont alors respectivement appelés extrémité initiale et finale.



Considérons maintenant la configuration suivante dans l'espace topologique $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$



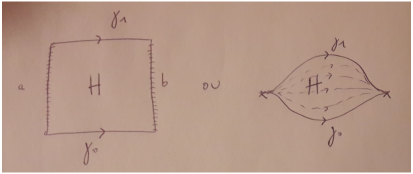
Quand est-ce que, deux chemins dessinés dans cet espace sont *topologiquement* équivalents ?

C'est la notion d'homotopie qui définit cela.

Etant donnés $\gamma_0 : [0,1] \to X$ et $\gamma_1 : [0,1] \to X$ deux chemins avec mêmes extrémités a et b dans X, on dira que γ_0 et γ_1 sont *homotopes* s'il existe une application

$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$$

telle que $H(0,t) = a$, $H(1,t) = b$, $H(s,0) = \gamma_0$ et $H(s,1) = \gamma_1$, ou plus visuellement



L'application H sera alors appelée *l'homotopie* entre les deux chemins.

Commentaire sur l'exemple précédent dans $\mathbb{R}^2 - \{0,0\}$.

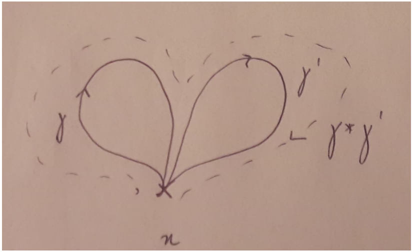
Dans la suite, on écrira maintenant tous les chemins γ à homotopie près, c'est-à-dire en identifiant tous les chemins équivalents pour la relation d'homotopie. On notera cela $[\gamma]$.

Nos objets d'étude pour définir le groupe fondamental ne seront en fait pas tous les chemins mais les *lacets* basés en un point particulier.

Distinguons un point $x \in X$. Un chemin γ de X est un lacet basé en x si

$$\gamma(0) = \gamma(1) = x \ .$$

Il existe une opération tout à fait naturel sur les lacets : la concaténation. Etant donnés deux lacets $[\gamma]$ et $[\gamma']$ basés en x, je peux les concaténer en le chemin noté $[\gamma] * [\gamma']$,



ou avec des formules

$$\gamma * \gamma' : t \longrightarrow \begin{cases} \gamma(2t) \ , \ t \in [0, 1/2] \\ \gamma'(2t-1) \ , \ t \in [1/2, 1] \ . \end{cases}$$

Si je pose maintenant

$$\pi_1(X,x) := \{\text{lacets } [\gamma] \text{ de } X \text{ basés en x}\} \ ,$$

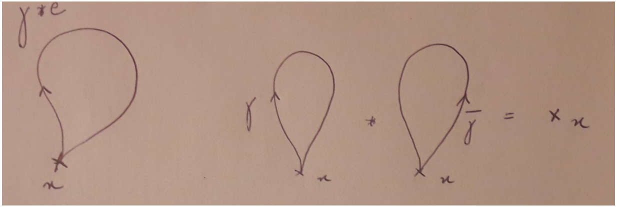
en posant e le lacet constant en x, $\pi_1(X,x)$ muni de la concaténation est un groupe.

On vérifie en effet :

(i) la composition est associative : cela n'importe pas dans quel ordre on concatène ;

(ii) e est un élément neutre pour la concaténation : rajouter le chemin constant en x au début ou à la fin d'un lacet ne le modifie pas ;

(iii) en notant $\bar{\gamma}$ le chemin γ parcouru dans le sens inverse, $\bar{\gamma}$ est un inverse pour γ.



Le groupe $\pi_1(X, x)$ est alors appelé *le groupe fondamental de X basé en x*.

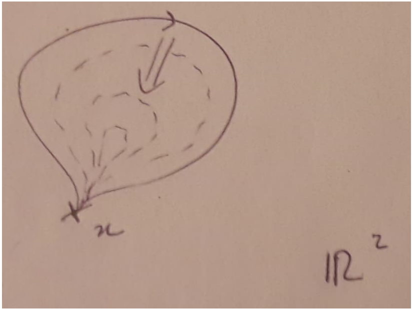
En fait, dans les exemples qui nous intéresseront le choix de x n'importe pas, et on notera donc

$$\pi_1(X) \ .$$

Quelques calculs sur des exemples simples.

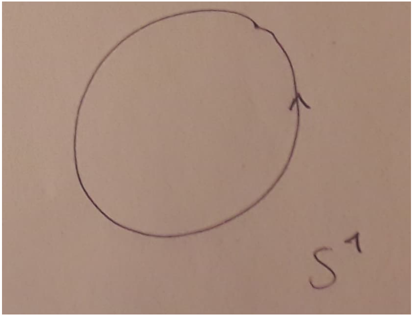
$$\pi_1(\mathbb{R}^2) = \{e\} \ .$$

En effet, dans $\mathbb{R}^2$ tout lacet se contracte en le lacet constant



$$\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \ .$$

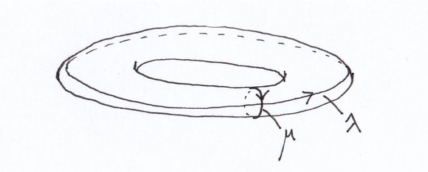
Un lacet dans le cercle, c'est simplement un chemin qui fait un nombre entier n de tours du cercle, dans le sens trigonométrique (signe $+$) ou anti-trigonométrique (signe $-$).



$$\pi_1(\mathbb{T}) = \mathbb{Z}\lambda \oplus \mathbb{Z}\mu \ ,$$

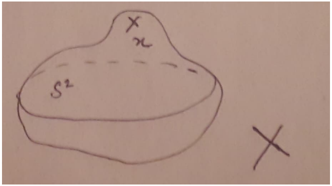
où λ est la longitude du tore et μ son méridien.

En effet on voit sur le dessin que tout lacet dépend de seulement deux entiers : le nombre de tours selon le méridien, et le nombre de tours selon la longitude.



Le groupe fondamental $\pi_1(X)$ est également appelé premier groupe d'homotopie de l'espace topologique X. Groupe d'homotopie car défini par des chemins identifiés sous la relation d'homotopie, mais premier ?

En fait, on peut regarder en général les n-sphères dans X, dont l'hémisphère nord s'envoie sur le point x



En définissant une relation d'homotopie et une opération de concaténation judicieuses sur les n-sphères, on construit suivant la procédure suivie à l'instant le *n-ème groupe d'homotopie*

$$\pi_n(X, x) \ .$$

$\pi_1(X)$ est alors bien le premier groupe d'homotopie car correspond aux lacets $\mathbb{S}^1 \to X$.

La collection des $\pi_n(X)$ est un invariant extrêmement fort des espaces topologiques, mais également extrêmement compliqué à calculer. Le calcul des groupes d'homotopie de l'exemple le plus simple, celui d'une sphère de dimension quelconque, est par exemple un problème encore ouvert à ce jour.

On appelle *noeud* de $\mathbb{R}^3$ tout plongement $K : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$. Le noeud est dit *orienté* si on spécifie en plus une orientation de $\mathbb{S}^1$ (exemple plus bas).

Un noeud de $\mathbb{R}^3$ correspond géométriquement exactement au nom qu'il porte: c'est un noeud, une corde qu'on a enroulée d'une certaine manière puis refermée sur elle-même.

Attention au changement de paradigme : un lacet de $\mathbb{R}^3$ est également une application $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$, mais cette fois le noeud est l'objet d'étude principal, ce n'est plus un moyen de construire une quantité algébrique.

Étant donnés deux noeuds K et K', la première question topologique qui se pose est : est-il possible de déformer K, sans faire jamais passer K à travers lui-même, et trouver K' à la fin ?

Deux noeuds pour lesquels une telle transformation est possible sont dits *équivalents*. Plus rigoureusement, une telle transformation est appelée *isotopie ambiante* entre K et K' :

Une *isotopie ambiante* entre deux noeuds $K, K' : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^3$ est une application continue

$$H : [0,1] \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

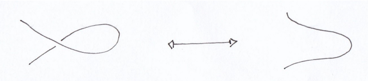
telle que $h_t := H(t, \cdot)$ est un homéomorphisme pour tout t, $h_0 = \mathrm{id}$ et $h_1 \circ K = K'$.

Si K et K' sont orientés, ils sont dits *équivalents* si $h_1 \circ K$ et K' ont la même orientation. Lorsque deux noeuds, orientés ou non, seront équivalents, on notera $K = K'$.

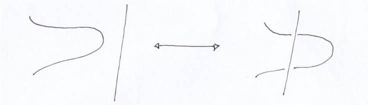
La manière classique de voir un noeud de $\mathbb{R}^3$ est de dessiner son projeté dans un plan bien choisi, avec des traits discontinus représentant les chevauchements du noeud : on parle alors de *diagramme de noeud*.

L'orientation du noeud est représentée par une flèche sur le diagramme, correspondant au sens de parcours du noeud.

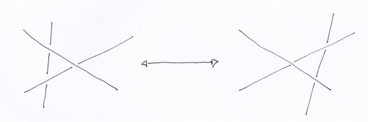
Maintenant, étant donnés deux diagrammes associés à deux noeuds distincts, comment savoir si les deux noeuds sont équivalents ou non ? On remarque déjà que les trois mouvements ci-dessous, dits *mouvements de Reidemeister*, correspondent à une isotopie ambiante entre deux noeuds.



(a)



(b)



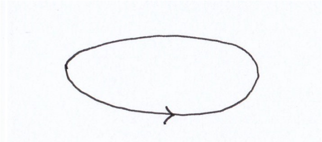
(c)

Deux diagrammes de noeud sont dits équivalents s'il est possible de passer de l'un à l'autre par un nombre fini de mouvements de Reidemeister.

En fait, les mouvements de Reidemeister et le diagramme de noeud caractérisent intégralement un noeud à équivalence près :

Deux noeuds sont équivalents si et seulement si leurs diagrammes de noeud sont équivalents.

Le *noeud trivial* est alors l'unique noeud pouvant être représenté comme

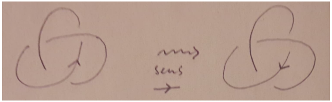


A partir d'un noeud orienté K on peut obtenir deux nouveaux noeuds :

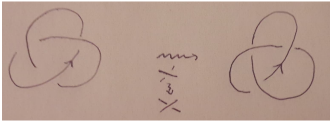
(a) le *noeud inverse* de K, noté $-K$, qui est K muni de l'orientation opposée.

(b) le *noeud miroir* de K, noté K^* qui est le noeud orienté obtenu par la réflexion de K à travers un plan.

Le noeud inverse



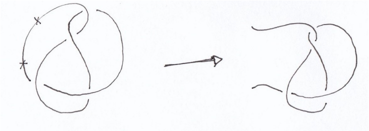
et le noeud miroir



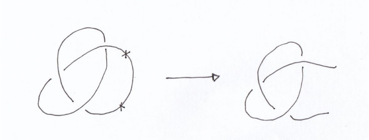
K est dit *inversible* si $K = -K$ et *achiral* si $K = K^*$.

Comment former de nouveaux noeuds à partir d'une collection de noeuds préexistants ? Le noeud inverse et le noeud miroir sont un exemple de construction, mais il y en a d'autres !

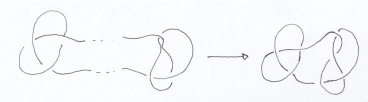
Étant donnés deux noeuds K et K', on peut former un nouveau noeud comme représenté ci-dessous



Un noeud K



Un noeud K'



Le noeud composé $K \# K'$

Le noeud obtenu à partir de cette opération est appelé la *composition* ou le *produit* de K et K', et est noté $K\#K'$. K et K' sont appelés les facteurs du noeud $K\#K'$.

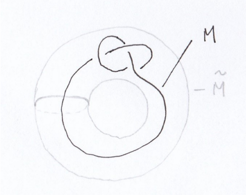
On dit alors qu'un noeud de $\mathbb{R}^3$ qui peut être obtenu comme composition de deux noeuds non triviaux est *composé*. Un noeud ne pouvant pas s'obtenir comme composition de deux noeuds non triviaux est dit *premier*.
On dispose comme dans le cas de l'arithmétique des entiers naturels d'un théorème de factorisation de tout noeud en noeuds premiers :

Soit K un noeud de $\mathbb{R}^3$. Alors il existe une suite $K_1, \ldots, K_n$ de noeuds premiers de $\mathbb{R}^3$ telle que

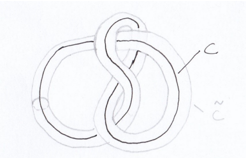
$$K = K_1 \# \cdots \# K_n.$$

De plus pour toute autre décomposition de K en noeuds premiers $K := K'_1 \# \cdots \# K'_m$, $n = m$ et il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $K'_i = K_{\sigma(i)}$ pour tout i.

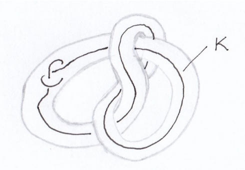
Une autre manière d'obtenir un nouveau noeud à partir de deux autres noeuds est la construction du noeud satellite. Soient M et C deux noeuds de $\mathbb{R}^3$. On considère un voisinage torique « dénoué » $\tilde{M}$ de M, tel que M ne soit pas trivial dans $\pi_1(\tilde{M})$, et un voisinage tubulaire $\tilde{C}$ de C. On forme comme ci-dessous un nouveau noeud noté K. Alors K est appelé le noeud *satellite* de C pour le *motif* $(M, \tilde{M})$ et C est appelé le noeud *compagnon* de K pour ce motif.



Un motif M



Un compagnon C

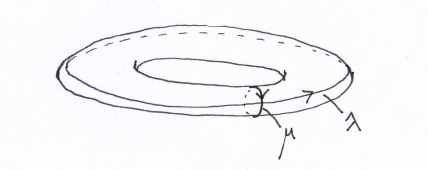


Le satellite K

S'il existe une isotopie ambiante dans $\tilde{M}$, de M vers une courbe fermée simple (= qui ne s'intersecte pas elle-même) de $\partial\tilde{M}$, on dit que S est un noeud câblé autour de C : on a enroulé un câble autour de $\tilde{C}$.

La famille la plus simple de noeuds non triviaux et deux à deux distincts se construit comme suit.

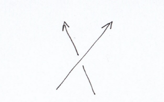
On considère le tore $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ muni du méridien μ et de la longitude λ



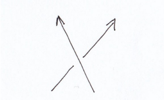
Soient p et $q \in \mathbb{N}$ tels que p et q sont premiers entre eux et $0 < p < q$.

On appelle (p, q)-noeud torique, la courbe simple fermée rencontrant le méridien μ p fois, chaque fois avec nombre d'intersection local $+1$, et rencontrant la longitude λ q fois, chaque fois avec nombre d'intersection local $+1$.

Le nombre d'intersection étant défini comme :

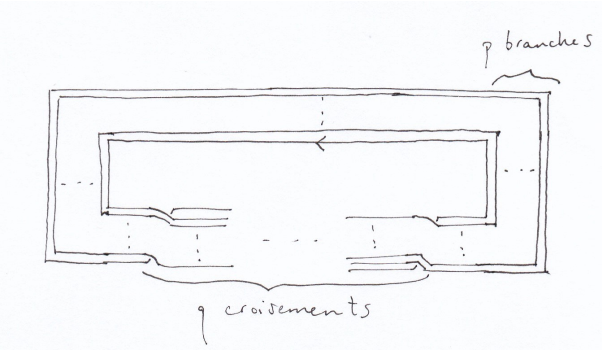


(a) Signe $+1$



(b) Signe -1

Le diagramme usuel d'un (p, q)-noeud torique est



Dans le cas où le motif M d'un noeud satellite est un (p, q)-noeud torique, le noeud satellite est appelé (p, q)-*noeud câblé* autour du compagnon C.

Soient alors $0 < p < q$ premiers entre eux.

(i) Le (p, q)-noeud torique est premier.

(iii) Tout (p, q)-noeud câblé est premier.

L'invariant le plus important associé à un noeud est son *groupe de noeud* :

Soit K un noeud de $\mathbb{R}^3$. On appelle *groupe de noeud* de K le groupe fondamental de son complémentaire

$$\pi := \pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash K).$$

Les groupes de noeud de deux noeuds équivalents sont isomorphes, c'est pour cela que le groupe de noeud est qualifié *d'invariant algébrique* associé au noeud.

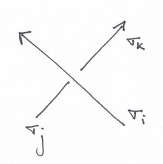
On remplace parfois dans la définition $\mathbb{R}^3 \backslash K$ par $\overline{\mathbb{R}^3 \backslash N}$ où N est un voisinage tubulaire de K.

Maintenant qu'il est défini, comment calculer le groupe de noeud ?

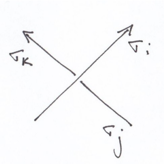
Une dernière définition sur les groupes d'abord. Etant donné deux lettres a et b, on appelle groupe libre engendré par a et b le groupe dont les éléments sont les mots en a, b, a^{-1} et b, et dont la multiplication est la concaténation des mots sous la relation $a * a^{-1} = \emptyset$ et $b * b^{-1} = \emptyset$. Cela se comprend bien mieux en faisant des exemples :

$$(aba^{-1}b^n a) * (baba) = aba^{-1}b^n ababa \ ,$$
$$(aba) * (a^{-1}ba^2) = ab^2a^2 \ ,$$
$$ababa * \emptyset = ababa \ .$$

Une méthode pour calculer le groupe de noeud d'un noeud est celle de la présentation de Wirtinger. Elle permet de calculer une présentation du groupe de noeud à partir du diagramme du noeud. Soit K un noeud orienté de $\mathbb{R}^3$. On le représente par un diagramme de noeud. On numérote les arcs σ_i entre chaque croisement du diagramme. On associe alors à chaque croisement une relation dépendant du nombre d'intersection local comme sur la figure **??**.



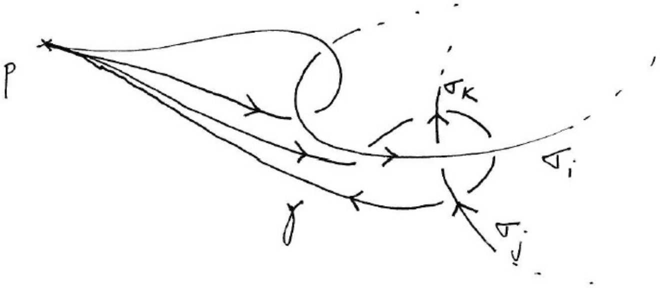
Relation
$\sigma_j \sigma_i \sigma_k^{-1} \sigma_i^{-1}$



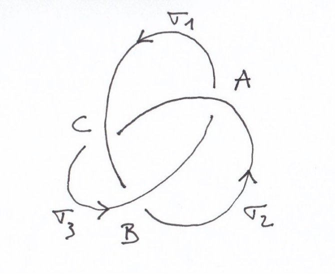
Relation
$\sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_k^{-1} \sigma_i$

Le groupe de noeud de K est alors le groupe libre engendré par les σ_i, quotienté par les relations associées à chaque croisement.

Pour une explication géométrique des relations de Wirtinger. On choisit un point base $p \in \mathbb{R}^3 \backslash K$. À tout arc σ_i on associe son méridien, qu'on note de la même manière. On considère le lacet γ comme dans la diapositive à venir. Ce lacet est alors contractile et est homotope à $\sigma_j \sigma_i \sigma_k^{-1} \sigma_i^{-1}$. La deuxième relation se déduit de la même manière. Cela montre que ces deux relations sont bien vérifiées dans le groupe de noeud.


p
σ_k
σ_i
γ
σ_j

On calcule par exemple le groupe de noeud du noeud de trèfle



Aux intersections A, B et C sont respectivement associées les relations

$$\sigma_3\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} \qquad \sigma_1\sigma_3\sigma_3^{-1}\sigma_3^{-1} \qquad \sigma_2\sigma_1\sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1} \ .$$

Le groupe de noeud du noeud de trèfle est donc

$$\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | \sigma_3\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}, \sigma_1\sigma_3\sigma_3^{-1}\sigma_3^{-1}, \sigma_2\sigma_1\sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1} \rangle \ ,$$

qui est isomorphe au groupe

$$\langle x, y | x^3 y^2 \rangle \ .$$

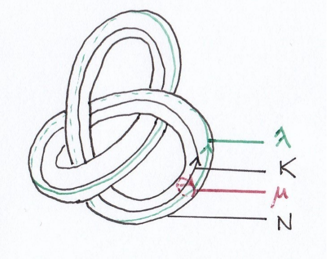
De manière générale, le groupe de noeud du (p, q)-noeud torique est le groupe

$$\langle x, y | x^p y^q \rangle \ .$$

Les groupes de noeuds toriques sont les seuls admettant une expression assez simple à manipuler. Pour les autres noeuds, les présentations de leur groupe de noeud sont souvent bien plus complexes. C'est pourquoi on essaie la plupart du temps de travailler avec d'autres invariants algébriques du noeud ou avec des propriétés particulières du groupe de noeud, plutôt qu'avec le groupe de noeud directement.

On considère K un noeud de $\mathbb{R}^3$ et N un voisinage tubulaire de K.

Il existe alors deux lacets canoniquement associés à K dans son groupe de noeud : le méridien μ et la longitude de Seifert λ



On appelle alors *système périphérique* de K la donnée du triplet (π, μ, λ). Le couple (μ, λ) vu dans π est appelé lui le *couple périphérique* du noeud K.

Le système périphérique d'un noeud orienté est un invariant complet du noeud orienté : il détermine entièrement sa classe d'équivalence en tant que noeud orienté.

Soient K_1 et K_2 deux noeuds orientés. Soient $(\pi_i, \mu_i, \lambda_i)$ pour $i = 1, 2$ leurs systèmes périphériques respectifs. Alors K_1 et K_2 sont équivalents si et seulement si il existe un isomorphisme de groupes $\phi : \pi_1 \to \pi_2$ tel que

$$\phi(\mu_1) = \mu_2 \text{ et } \phi(\lambda_1) = \lambda_2.$$

De ce théorème découle un corollaire :

Soient K un noeud orienté et (π, μ, λ) son système périphérique.

(i) K est inversible si et seulement si il existe un automorphisme de groupe $\phi : \pi \to \pi$ tel que $\phi(\mu) = \mu^{-1}$ et $\phi(\lambda) = \lambda^{-1}$.

(ii) K est achiral si et seulement si il existe un automorphisme de groupe $\phi : \pi \to \pi$ tel que $\phi(\mu) = \mu^{-1}$ et $\phi(\lambda) = \lambda$.

1. Éléments de topologie algébrique
   - Philosophie et histoire de la topologie algébrique
   - Le groupe fondamental $\pi_1(X)$
   - Le n-ième groupe d'homotopie $\pi_n(X)$
2. Théorie des noeuds élémentaire
   - Définitions et constructions de base
   - Le groupe de noeud
   - Pour aller plus loin

La théorie des noeuds n'est qu'un cas particulier de la question plus générale : étant donné deux espaces topologiques M et N, comment caractériser les plongements de $M \to N$? Pour les noeuds, $M = \mathbb{S}^1$ et $N = \mathbb{R}^3$.

C'est donc l'exemple le plus simple sur lequel essayer de construire et étudier des invariants, qu'on pourra ensuite espérer généraliser à des cas plus généraux de plongements $M \to N$.

En fait, la théorie des noeuds entretient également un lien étroit avec d'autres domaines des maths qui n'auraient rien à voir à première vue.

Un des invariants les plus connus à associer à un noeud est le polynôme HOMFLY, qui est un polynôme à deux variables contenant énormément d'informations sur le noeud. Ce polynôme se construit normalement avec des arguments purement topologiques. Mais il existe une seconde construction de ce polynôme, utilisant des notions de géométrie symplectique. La topologie et la géométrie symplectique donnent donc, par deux cheminements différents, le même polynôme associé au noeud. Cela donne donc deux façons de le calculer : s'il est trop difficilement calculable en topologie, on peut essayer de le calculer en géométrie symplectique, et vice versa !