COURBURE ET CHAMPS MAGNÉTIQUES

PIERRE FLURIN

RÉSUMÉ. Cette première section est inspiré d'une conférence que j'ai présenté à l'école d'été d'Aiguebelette-le-Lac où mon objectif était de présenter dans un cadre informel face à une assemblée de physiciens le lien entre géométrie et champs magnétique et la condition de quantification de Dirac. J'ai réécris cet exposé de manière rigoureuse pour pouvoir la présenter à un public mathématicien mais l'objectif reste de mettre en lumière ce lien fort entre les deux disciplines.

1. CONNEXION ET COURBURE

Soit $L \to M$ un fibré en droite sur une variété complexe M.

DEFINITION **1.1.** *On définit l'opérateur de Dolbeault $\bar{\partial}_L$ sur un fibré en droite holomorphe de la manière suivante : sur (U, σ) une trivialisation holomorphe locale de L,*

$$\bar{\partial}_L(f\sigma) := \bar{\partial} f \sigma$$

la définition est bien posé car si on change de base holomorphe la matrice de changement de base f sera holomorphe et n'apparaitra pas dans le $\bar{\partial}$.

DEFINITION **1.2.** *Une connexion ∇ sur un fibré en droite est une application*

$$\nabla : C^\infty(M, L) \to C^\infty(M, TM^* \otimes L)$$

verifiant la règle de Liebnitz :

$$\forall s \in C^\infty(M, L), f \in C^\infty(M), \nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$$

Soit h une métrique hermitienne sur L. Une connexion ∇ est métrique si elle vérifie

$$\forall s_1, s_2 \in C^\infty(M, L) \quad dh(s_1, s_2) = h(\nabla s_1, s_2) + h(s_1, \nabla s_2)$$

où

$$\forall \alpha \in \omega_1(M) \quad h(\alpha \otimes s_1, s_2) = h(s_1, \bar{\alpha} \otimes s_2) = \alpha h(s_1, s_2)$$

Une connexion est de chern si elle est métrique et de plus elle coincide avec l'opérateur de Dolbeault sur les $(0,1)$-formes

$$(\nabla s)^{(0,1)} = \bar{\partial}_L s$$

PROPOSITION **1.3.** *La connexion de chern ∇_L existe et est unique*

Démonstration. Si une telle connexion existe, alors en projetant la formule métrique sur le (1,0) forme, on obtient que

$$h((\nabla_L s_1)^{1,0}, s_2) = h(s_1, \bar{\partial}_L s_2) + \partial h(s_1, s_2)$$

cela prouve l'unicité et nous donne la forme de la connection. Montrons maintenant que c'est bien une connection. Soit σ un base locale holomorphe :

$$\begin{aligned} h(\nabla_L(fs), \sigma) &= h(\bar{\partial}_L(fs), \sigma) + \partial h(fs, \sigma) \\ &= \bar{\partial} f \ h(s, \sigma) + \partial f \ h(s, \sigma) + f \ (h(\bar{\partial}_L s, \sigma) + \partial h(s, \sigma)) \\ &= df \ h(s, \sigma) + f \ (h(\bar{\partial}_L s, \sigma) + \partial h(s, \sigma)) \end{aligned}$$

De plus l'expression dans un base locale holomorphe de la connection est

$$\nabla_L(f\sigma) = (df + \partial \log(h(\sigma, \sigma))) \otimes \sigma$$

□

Localement, sur un ouvert suffisamment petit U, une connexion sur un fibré en droite est représenté par le choix d'une base $\sigma \in C^\infty(U,L)$ aussi appelé une jauge et d'une 1-forme correspondante définie de manière unique par $\nabla\sigma = A \otimes \sigma$, alors dans la trivialisation correspondante la connexion s'écrit :

$$\nabla = d + A$$

où A agit par multiplication.

Proposition **1.4.** *L'espace des connexions est un espace affine polarisé par $\Omega^1(M)$.*

Démonstration. En effet, soit ∇_1 et ∇_2 deux connexions, alors $\nabla_1 - \nabla_2 = A_1 - A_2$ est localement un opérateur de multiplication par une 1-forme. Le changement de base locale sur un ouvert est la donnée d'une fonction lisse non nulle $\sigma' = f\sigma$. Le changement de 1-forme résultant est $A' = A + df$. Cela induit que la 1-forme $A_1 - A_2$ ne dépend pas de la trivialisation du fibré et donc c'est une 1-forme globale. $\square$

Il est possible d'étendre la connexion aux formes différentielles à valeur dans L en la calquant localement sur la différentielle extérieure avec la règle de Liebniz. Pour tout $s \in \Omega^\bullet(M)$ et toute base locale du fibré en droite σ, s s'écrit $s = \beta \otimes \sigma$ où β est une forme différentielle et si on définit l'action de ∇ par

$$\nabla s = \nabla(\beta \otimes \sigma) = d\beta \otimes \sigma + \nabla\sigma \wedge \beta = d\beta \otimes \sigma + A \wedge \beta \otimes \sigma$$

alors cela étend l'opérateur de manière unique. Soit $\sigma' = f\sigma$ une autre jauge ($f \in C^\infty(M)$) alors

$$\nabla s = \nabla(\alpha \otimes \sigma') = d\alpha \otimes \sigma' = f d\alpha + \alpha \wedge \nabla(f\sigma) = (f d\alpha + df \wedge \alpha) \otimes \sigma + f\alpha \otimes \nabla\sigma = d\beta \otimes \sigma + \beta \wedge \nabla\sigma$$

ce qui prouve la bonne définition et on peut donc définir la courbure par l'opération ∇^2.

Proposition **1.5.** *La courbure est un opérateur de multiplication par la 2-forme définie localement par $F_\nabla := \nabla^2 = dA$*

$$\nabla^2(f\sigma) = \nabla(df \otimes \sigma + fA \otimes \sigma) = (d^2 f + A \wedge df + df \wedge A + f dA + A \wedge A) \otimes \sigma = dA \otimes f\sigma$$

Remarque **1.** *Soit (L, ∇_L, h) un fibré holomorphe métrique muni de sa connection de Chern. On peut calculer localement dans une base holomorphe (U, σ) sa courbure qui est*

$$d\partial \log(h(\sigma,\sigma)) = -\partial\bar{\partial} \log(h(\sigma,\sigma))$$

on note $\phi := -\log(h(\sigma,\sigma))$ le potentiel de Kähler local de h.

2. Première classe de Chern

Nous allons maintenant introduire de manière analytique la première classe de Chern sur les fibré en droite.

Definition **2.1.** *on note le représentant de la première classe de Chern de L par ∇*

$$c_1(L, \nabla) = \frac{1}{2i\pi} F_\nabla$$

et on définit la première classe de Chern de L comme la classe d'équivalence de $c_1(L,\nabla)$ dans la cohomologie de Rham

$$c_1(L) = [c_1(L, \nabla)]$$

Notre objectif est maintenant de montrer les affirmation suivantes : la définition de c_1 est bien posée (ne dépend pas de nabla) et c'est un morphisme de groupe injectif pour la structure de groupe suivante sur le groupe des fibrés en droite $\mathcal{L}$.

Proposition **2.2.** *La classe de Chern de dépend pas de la connexion.*

Démonstration. Soit ∇_1, ∇_2 deux connexions sur L, on veut prouver que $[c_1(L,\nabla_1)] = [c_1(L,\nabla_2)]$. Soit $A_{\Delta\nabla} := \nabla_1 - \nabla_2$, c'est une 1-forme <u>globale</u> sur M et soient A_1 et A_2 les 1-formes <u>locale</u> associées à la jauge locale σ.

$$F_{\nabla_2}\sigma = \nabla_2^2\sigma = (d + A_1 + A_{\Delta\nabla})(A_1 + A_{\Delta\nabla}) \otimes \sigma = dA_1 + dA_{\Delta\nabla} = F_{\nabla_1} + dA_{\Delta\nabla}$$

Comme $A_{\Delta\nabla}$ est une 1-forme globale, on a bien le résultat escompté. La définition de $c_1(L)$ est donc bien posé. $\square$

Proposition **2.3.** *$c_1(L)$ est réelle*

Démonstration. Il suffit pour cela de prendre la métrique de Chern associé à n'importe quelle métrique sur L. La courbure associé est

$$F_{\nabla_L} = \partial\bar{\partial}\log h(\sigma,\sigma)$$

pour σ une base holomorphe locale. Comme $\log h$ est une fonction réelle, $i\partial\bar{\partial}\log h$ est une deux forme réelle. □

Munissons maintenant $\mathcal{L}$ d'une structure de groupe abélien : l'addition est le produit tensoriel $L_1 + L_2 = L_1 \otimes L_2 \simeq L_2 \otimes L_1$, l'élément neutre est le fibré trivial et l'inverse est le dual $L \otimes L^* \simeq \mathbb{C}$.

Proposition **2.4.** *c_1 est donc un morphisme de groupe abélien de $\mathcal{L}$ vers $H^2(M,\mathbb{R})$*

Démonstration. La différentielle extérieure est une connexion de courbure nulle pour le fibré trivial donc $c_1(\mathbb{C}) = 0$. De plus soient L_1, L_2 deux fibré en droites munis de connexion respectives ∇_1, ∇_2. On définit alors la connexion $\nabla_{1\otimes 2}$ qui agit sur les sections de $L_1 \otimes L_2$ par

$$\forall s_1 \in C^\infty(M,L_1)\ \forall s_2 \in C^\infty(M,L_2)\quad \nabla_{1\otimes 2}(s_1 \otimes s_2) = \nabla_1 s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla_2 s_2$$

La règle de Liebniz induit que la définition est bien posée et la décomposition locale des section de $L_1 \otimes L_2$ comme le produit tensoriel de deux sections de respectivement L_1 et L_2 étend la définition à toutes les sections. Si on regarde la forme locale de la connexion dans la base $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ alors

$$\nabla_{1\otimes 2} f\sigma_1 \otimes \sigma_2 = (df + fA_1 + fA_2)\sigma_1 \otimes \sigma_2$$

et alors

$$F_{\nabla_{1\otimes 2}} = dA_1 + dA_2 = F_{\nabla_1} + F_{\nabla_2}$$

ce qui implique que $c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2)$. □

Proposition **2.5.** *c_1 est injectif*

Afin de prouver analytiquement ce résultat, nous allons devoir utiliser le transport parallèle.

Definition **2.6.** *Soit γ un chemin sur M et $\lambda \in L_{\gamma_0}$, alors il existe un unique relèvement $\tilde{\gamma}$ de γ vers une section de $\gamma([0,1]) \to L$ telle que $\nabla_{d_t\gamma}\tilde{\gamma} = 0$. Le transport parallèle de λ le long de γ est $\tilde{\gamma}(1) \in L_{\gamma(1)}$*

Lemme **2.7.** *Le transport parallèle le long d'une connexion de courbure nulle ne dépend que de la classe d'homotopie du chemin γ*

Démonstration. Soit γ et γ' deux chemins homotopes dans M et $H(t,h)$ une homotopie de γ à γ'. Soit ∇ un connexion plate sur L. Soit (U_i, σ_i) un atlas de trivialisations de L localement fini avec chaque section de base étant plate. Pour $\delta h, \delta t \in \mathbb{R}$ suffisamment petit, $H([t+\delta t] \times [h+\delta h])$ est toujours inclus dans un ouvert. Dans un tel rectangle, comme la connexion est plate et la section aussi, la connexion s'écrit

$$\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma$$

et donc le transport parallèle est trivial dans cette trivialisation. Comme sur tout chemin γ le transport parallèle est trivial le long de $\gamma \cdot \gamma^{-1}$, on peut en agençant une ligne de carré de taille $\delta_t \times \delta_h$ ensemble montrer que pour tout $h \in [0, 1-\delta h]$, le transport parallèle le long de $H(\cdot, h)$ et $H(\cdot, h+\delta h)$ est le même (cf schéma). Cela prouve le résultat. □

Nous pouvons maintenant montrer le résultat central de cette sous-section.

Démonstration. Soit L un fibré en droite tel que $c_1(L) = 0$. Montrons que L est trivial.
Nous avons besoin tout d'abord d'une connexion de courbure nulle. Soit ∇_0 une connexion sur L. Comme $[F_{\nabla_0}] = 0$ alors $F_{\nabla_0} = d\beta$ avec $\beta \in \Omega^1(M)$. Comme l'espace des connexions sur L est polarisé par Ω_1, on a que $\nabla := \nabla_0 - \beta$ est une connexion et $F_\nabla = 0$.
Soit maintenant $\tilde{M}$ le revêtement universel de M, $\tilde{L} = \pi^* L$ et $\tilde{\nabla} = \pi^*\nabla$. Sur $\tilde{M}$, nous pouvons construire une section globale non nulle $\tilde{s}$ de $\tilde{L}$ de la manière suivante : Soit x un point de $\tilde{M}$, on fixe $\tilde{s}(x) \neq 0$ et pour tout y dans $\tilde{M}$ on définit $\tilde{s}(y)$ comme le transport parallèle de x à y de $\tilde{s}(x)$ par un chemin arbitraire. Comme la connexion est plate et le groupe fondamental trivial, l'holonomie est triviale et la section est bien définie et non nulle. De plus $\tilde{\nabla}\tilde{s} = 0$ par définition du transport parallèle. Le fibré $\tilde{L}$ est donc le fibré trivial

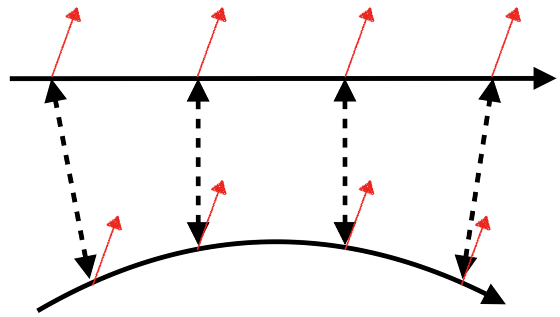

Figure 1. L'holonomie est localement triviale sur les ouverts de trivialisation et donc tout le long du chemin

sur $\tilde{M}$ et la section $\tilde{s}$ est une fonction constante sur $\tilde{M}$. La section est donc invariante par l'action de groupe de Galois de M sur $\tilde{M}$ et on peut donc la projeter sur M, définissant une section globale non nulle, induisant donc que L est trivial. □

Remarque **2.** *La première classe de Chern peut se définir algébriquement comme l'isomorphisme de $\mathcal{L}$ vers $H^2(M,\mathbb{Z})$ de la suite exacte longue de cohomologie de faisceau induite par la suite suite exacte courte de faisceaux*

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}(M) \xrightarrow{\exp(2i\pi\cdot)} \mathcal{O}^*(M) \to 0$$

Il est facile de voire que les classes d'isomorphisme de fibrés en droite est égale à la première classe de cohomologie de Čech.

Remarque **3.** *En particulier $H^2(M,\mathbb{Z})$ est un sous groupe discret de $H^2(M,\mathbb{R})$ par l'injection de faisceaux $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Cela sera très important quand nous parlerons de quantification.*

Definition **2.8.** *Une variété kählerienne (M,ω) est préquantifée s'il existe un fibré en droite hermitien (L,h) tel que la courbure de la connexion de Chern est ω.*

3. Champs magnétique et condition de quantification de Dirac

En physique, les particules quantiques sur à un temps donné sont décrites par des fonctions d'ondes à phase près, qui sont mathématiquement les éléments du projectivisé d'un certain espace de Hilbert. Cette espace est souvent ,pour les problèmes de dynamique sur une variété riemanienne (M,g), l'espace des fonction de carré intégrable à valeur dans "$\mathbb{C}$" (en réalité il s'agira d'un fibré en droite métrique (L,h)) par rapport au produit scalaire

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \int_M h(\psi,\varphi)\,\mathrm{Vol}_g$$

. L'évolution temporelle d'une particule est la donnée d'un opérateur Hamiltonien $\tilde{H}$, cet opérateur étant formellement la représentation sur l'espace de Hilbert du générateur du groupe des translations temporelles. Il s'écrit pour une particule seul

$$\tilde{H} = \tilde{H}_{\text{cinétique}} + \tilde{H}_{interaction} = \frac{1}{2m}\tilde{P}^*\tilde{P} + V(\tilde{X})$$

Et il s'écrit pour un mathématicien désintéressé par les constantes physiques et les potentiels

$$\tilde{H} = \tilde{P}^*\tilde{P}$$

où $\tilde{P}$ est l'opérateur impulsion de la particule, et est sans la présence d'un champs magnétique la différentielle extérieure et $\tilde{P}^*$ est le dual de $\tilde{P}$ pour le produit scalaire induit par g sur les 1-formes à valeurs dans L.

Le champs magnétique (en statique) ou le champ électromagnétique (relativiste) est la donnée d'une 2-forme F fermé, nous traiterons ici que le cas non relativiste. L'action du champs magnétique sur les particules de charge q est de la forme suivante. Localement on peut associer à F une 1-forme A, le potentiel vecteur, telle que

$$F = dA$$

alors, le champs magnétique modifie l'opérateur impulsion en ajoutant un terme potentiel vecteur

$$\tilde{P} = d + iqA$$

Cependant cette définition pose deux problèmes majeurs. Le potentiel vecteur n'est pas définit de manière unique mais à jauge près et si $[F] \neq 0$ alors A n'est pas définie globalement. Une solution au premier problème consiste à interpréter $\mathbb{C}$ comme le fibré en droite trivial au dessus de M et l'opérateur impulsion comme une connexion sur ce fibré. Le changement de jauge locale implique un changement de base

$$A \to A + df \Rightarrow \sigma \to e^{iqf}\sigma$$

$$\tilde{P} = \nabla$$

La connection n'est toujours pas définie de manière unique car on peut toujours lui ajouter une 1-forme fermé sans modifier la courbure mais on fixe par convention que la connexion est l'unique connection de Chern de courbure F.

Cependant le second problème n'est pas une mince affaire, si on suit la logique de la théorie de jauge, quand $[F] \neq 0$ alors il faut trouver un fibré en droite L tel que

$$c_1(L) = \frac{q}{2\pi}[F]$$

Normalisons la charge à $q = 1$ et tirons des conclusion de cette observation. Cela implique que cela implique que le champs magnétique et la charge sont quantifiés globalement. En utilisant la dualité de Poincaré on déduit que le flux du champs magnétique à travers une surface fermé est quantifié

$$\oint_S F \in \frac{2\pi}{q}\mathbb{Z}$$

. Si $[F] \neq 0$, alors il existe certaines surfaces pour lesquelles l'intégrales est non nulle et donc témoigne de l'existence de monopoles magnétiques.

Remarque **4.** *Les équations de Maxwell en présence de monopole magnétique "matériel" s'écrit*

$$dF = k$$

$$d^*F = j$$

où k est le courant magnétique et j est le courant électrique. Mais nous travaillons ici avec $dF = 0$ ce qui témoigne d'une charge magnétique d'une autre nature que la charge électrique, elle est en effet de nature topologique et donc ne peut pas exister dans une géométrie où $H^2(M, \mathbb{Z}) = 0$.

Remarque **5.** *Si le $H^2(M, \mathbb{Z})$ est de dimension supérieure ou égale à 2, certains champs magnétique sont tout simplement inaccessibles. Ce n'est pas le cas des surfaces de Riemann qui sont au centre de l'effet Hall quantique topologique mais c'est le cas d'un univers asymptotiquement Minkowsky où coexistent plusieurs trous noirs*

$$H^2(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\#\{Nombre\ de\ trous\ noirs\}}$$

Alors la charge magnétique topologique de chaque trou noir est quantifié.

Remarque **6.** *Si on impose que F soit une (1,1)-forme sur un variété kählerienne (M, ω) comme on le fera dans la suite, alors le lemme $\partial\bar{\partial}$ nous permet de donner une bijection entre l'espace des métrique sur L et les tenseurs électromagnétique avec les potentiels de Kähler globaux. En effet soit si $F_0, F \in 2i\pi c_1(L)$, il existe un unique φ tel que*

$$F = F_0 + \partial\bar{\partial}\varphi$$

et si F_0 est la courbure de la connexion de Chern métrique h_0 on a la bijection

$$F = F_0 + \partial\bar{\partial}\varphi \to h = e^{\varphi}h_0$$

4. Identité de Kähler, Formule de Bochner-Koidara et lien avec la cohomologie

On suppose maintenant que $(M, \omega, L, h, \nabla_L)$ est une variété kählerienne préquantifiée compacte et que $F = k\omega$ est associé à la connection de Chern ∇_k de h^k sur L^k.

Nous allons tout d'abord travailler sur le fibré trivial puis nous généraliserons à tout les fibrés en droite les identités de kähler pour finalement mettre en exergue la torsion qui sort dans la formule de Bochner-Koidaran et donc le lien entre le niveau fondamental physique et la cohomologie de Dolbeault.

Proposition **4.1** (Formule de Bochner-Koidara (cas particulier)). *Soit $\bar{\partial}_k$ l'operateur de Dolbeault sur L^k*

$$\nabla_k^* \nabla_k = 2\bar{\partial}_k^* \bar{\partial}_k + nk$$

et donc

$$\ker(\tilde{H}_k - \lambda_{k,min}) = H^0(M, L^k)$$

Nous allons tout d'abord prouver l'existence d'un système de coordonnées normales holomorphe autour d'un point pour n'importe quel fibré holomorphe E muni d'une métrique $(,)$. Cela nous sera très utile pour les fibrés L et $T^*M^{1,0}$

Proposition **4.2.** *Pour tout point $x_0 \in M$ et n'importe quel système de coordonnée $(z_1, \cdots, z_n)$ centré en x_0, il existe autour de x_0 une base holomorphe $(e_\lambda)_\lambda$ de E tel que*

$$(e_\lambda(z), e_\mu(z)) = \delta_{\lambda\mu} - \sum_{j,k} c_{jk\lambda\mu} z_j \bar{z}_k + \mathcal{O}(|z|^3)$$

où $(c_{jk\lambda\mu}$ sont les coefficients du tenseur de courbure de E en x_0. On appelle une telle base la base normale en x_0.

Démonstration. On peut choisir une base $(h_\lambda)_\lambda$ telle que

$$(h_\lambda(0), h_\mu(0)) = \delta_{\lambda\mu}$$

alors cette base admet un développement

$$(h_\lambda(z), h_\mu(z)) = \delta_{\lambda\mu} + \sum_j (a_{j\lambda\mu} z_j + \bar{a}_{j\mu\lambda} \bar{z}_j) + \mathcal{O}(|z|^2)$$

On peut alors définir

$$g_\lambda(z) = h_\lambda(z) - \sum_{j,\mu} a_{j\lambda\mu} z_j h_\mu(z)$$

Sur cette base on a

$$(g_\lambda(z), g_\mu(z)) = \delta_{\lambda\mu} + \sum_{j,k} (b_{jk\lambda\mu} z_j \bar{z}_k + c_{jk\lambda\mu} z_j z_k + \bar{c}_{jk\mu\lambda} \bar{z}_j \bar{z}_k) + \mathcal{O}(|z|^3)$$

et finalement la base normale est

$$e_\lambda(z) = g_\lambda(z) - \sum_{j,k,\mu} c_{jk\lambda\mu} z_j z_k g_\mu(z)$$

□

Nous définissons ensuite l'étoile de Hodge afin d'avoir une définition locale du dual des opérateurs différentiels.

Definition **4.3** (Etoile de Hodge). *Soit le morphisme antilinéaire de $C^\infty(M)$-algèbres*

$$* : \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{n-q,n-p}(M)$$

défini par la relation

$$\forall \alpha, \beta \in \Omega^{p,q}(M), \quad \alpha \wedge *\beta = (\alpha, \beta) \operatorname{Vol}_\omega$$

où $(\cdot, \cdot)$ est métrique induite par ω et $\operatorname{Vol}_\omega = \frac{\omega^n}{n!}$ On définit aussi l'étoile de Hodge pour L

$$\star : \Omega^{p,q}(M, L) \to \Omega^{n-q,n-p}(M, L)$$

par

$$\forall \gamma, \tau \in \Omega^{p,q}(M, L), \quad \gamma \wedge_L \star\tau = h(\gamma, \tau)\,\mathrm{Vol}_\omega$$

où $\wedge_L$ *est l'opération induite par le produit extérieur sur les formes différentielles et le morphisme antilinéaire* $L \to L^*, s \to h(\cdot, s)$.
On définit aussi l'opérateur de Lefschetz L^ω *de multiplication par* ω *et son dual* Λ^ω

soit $(e_1, \cdots, e_n)$ un base orthonormé orienté de $T^*M^{0,1}$ telle que $\mathrm{Vol}_\omega = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \wedge \bar{e}_1 \wedge \bar{e}_n$. Alors dans la base associé de $\Lambda^\bullet(T^*M)$ l'étoile de hodge s'écrit pour I, J deux multi-indices ordonnés

$$*e_I \wedge \bar{e}_J = (-1)^{|J|}\epsilon(I, I^c)\epsilon(J, J^c)e_{J^c} \wedge \bar{e}_{I^c}$$

où I^c est le multiindice complémentaire ordonné et $\epsilon(I, I^c)$ la signature de la permutation $(1, \cdots, n) \to (I, I^c)$

Le produit scalaire sur les formes différentielles s'écrit ainsi

$$\langle \alpha, \beta\rangle = \int_M \alpha \wedge *\beta$$

et

$$\langle \gamma, \tau\rangle = \int_M \gamma \wedge_L \star\tau$$

Proposition **4.4.** *L'étoile de hodge est une involution à facteur près :*

$$*^2 = (-1)^{p(2n-p)}Id \quad \star^2 = (-1)^{p(2n-p)}Id$$

sur les p-formes et on peut exprimer les duals de d,∂,$\bar\partial$,$\bar\partial_L$,∇_L *et* L^ω *de la manière suivante :*

$$d^* = - * d* \ , \quad \partial^* = - * \partial* \ , \quad \bar\partial^* = - * \bar\partial*$$

et

$$\bar\partial_L^* = - \star \bar\partial_L\star \ , \quad \nabla_L^* = - \star \nabla_L\star \ , \quad \Lambda^\omega = *L^\omega*$$

Démonstration.

$$*^2 e_I = \epsilon(I, I^c)\epsilon(I^c, I)e_I$$

or $\epsilon(I, I^c)\epsilon(I^c, I) = (-1)^{|I|(2n-|I|)}$ et idem pour $\star$.
On ne va prouver le second résultat que pour ∇_L^* car les autres preuves sont similaires et plus simples. Soient s une (p-1)-forme L et s' une p-forme à valeurs dans L

$$\langle s', \star\nabla_L\star\rangle = \int_M s' \wedge_L \star\star\nabla_L\star = (-1)^{p(2n-p)}\int_M s' \wedge_L \nabla_L \star s$$

or comme ∇_L est la connection de chern

$$d(s' \wedge_L \star s) = \nabla_L s' \wedge_L \star s + (-1)^{p(2n-p)}s' \wedge_L \nabla_L s$$

et enfin

$$\langle s', \star\nabla_L \star s\rangle = -\int_M \nabla_L s' \wedge_L \star s = -\langle \nabla_L s', s\ \rangle$$

□

Enfin si A, B, C sont des endomorphismes de $\Omega^{\bullet,\bullet}(M)$ de degrés a, b, c on définit leur super commutateur

$$[A, B] = AB - (-1)^{ab}BA$$

qui vérifie l'identité de Jacobi gradué

$$(-1)^{ca}[A, [B, C]] + (-1)^{ab}[B, [C, A]] + (-1)^{bc}[C, [A, B]] = 0$$

On peut maintenant prouver les identités de kähler

Proposition **4.5.**

$$\begin{aligned} [\bar\partial^*, L^\omega] &= i\partial \quad , \quad [\partial^*, L^\omega] = i\bar\partial \\ [\Lambda^\omega, \bar\partial] &= -i\partial^* \quad , \quad [\Lambda^\omega, \partial] = i\bar\partial^* \end{aligned} \tag{1}$$

Lemme **4.6.** *Sur* $\mathbb{C}^n$ *avec la forme standard* $\omega = \sum_i idz_i \wedge d\bar{z}_i$ *on a,*

$$[\bar\partial^*, L] = i\partial$$

Démonstration. Pour $\alpha = \sum_{I,\bar{J}} \alpha_{I,\bar{J}} dz_I \wedge d\bar{z}_{\bar{J}}$ On a

$$\bar{\partial}\alpha = \sum_{I,\bar{J},k} \frac{\partial \alpha_{I,\bar{J}}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_{\bar{J}}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}^*\alpha &= - * \bar{\partial} \sum_{I,J} \bar{\alpha}_{I,J} (-1)^{|I|} \epsilon(I, I^c)\epsilon(J, J^c) dz_{J^c} \wedge d\bar{z}_{I^c} \\
&= - * \sum_{I,J,k} \frac{\partial \bar{\alpha}_{I,J}}{\partial \bar{z}_k} (-1)^{|I|} \epsilon(I, I^c)\epsilon(J, J^c) d\bar{z}_k \wedge dz_{I^c} \wedge d\bar{z}_{J^c} \\
&= - \sum_{I,J,k} \epsilon(I, I^c)\epsilon(J, J^c)\epsilon(I^c, I)\epsilon(J^c \cup \{k\}, J \setminus \{k\}) \frac{\partial \alpha_{I,J}}{\partial z_k} \iota_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}} dz_I \wedge d\bar{z}_J \\
&= - \sum_{I,J,k} \frac{\partial \alpha_{I,J}}{\partial \bar{z}_k} \iota_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}} dz_I \wedge d\bar{z}_J
\end{aligned}$$

On a donc

$$[\bar{\partial}^*, L^\omega]\alpha = - \sum_k \iota_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}} (\frac{\partial}{\partial z_k}(\omega \wedge \alpha)) + \omega \wedge \sum_k \iota_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}} \frac{\partial \alpha}{\partial z_k}$$

or comme ω est à coefficient constant et $\iota_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}} \omega = -idz_k$ on obtiens

$$[\bar{\partial}^*, L^\omega]\alpha = idz_k \frac{\partial}{\partial z_k} \alpha$$

□

On peut maintenant passer à la preuve du cas général

Démonstration. Il suffit de prouver la première identité car les autres en découlent par conjugaison et dualité. Nous nous plaçons dans un système de coordonnées normales $(z_1, \cdots, z_n)$ où

$$\omega = \sum_i idz_i \wedge d\bar{z}_i + \sum_{ij} \gamma_{i\bar{j}} dz_i \wedge d\bar{z}_j$$

avec γ et ses premières dérivées d'ordre $\mathcal{O}(|z|)$. Alors

$$\sum_{I,J,k} \frac{\partial \alpha_{I,J}}{\partial \bar{z}_k} \iota_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}} dz_I \wedge d\bar{z}_J + \sum_{I,J,K,L} g_{I,J,K,L} \alpha_{I,J} dz_K \wedge d\ \bar{z}_L$$

où g s'exprime avec des dérivé première de ω et donc s'annule en 0. On applique le même raisonnement pour $[\bar{\partial}^*, L^\omega]$ et on obtiens le résultat en 0. □

Corollaire **4.7.** $\Delta_{\bar{\partial}} = [\bar{\partial}, \bar{\partial}^*] = [\partial, \partial^*] = \Delta_\partial$

Démonstration.

$$[\bar{\partial}, \bar{\partial}^*] = -i[\bar{\partial}, [\Lambda^\omega, \partial]]$$

De plus, on a $[\partial, \bar{\partial}] = 0$ et en applicant l'identité de Jacobi à $\bar{\partial}, \partial, \Lambda^\omega$ on obtient

$$[\bar{\partial}, [\Lambda^\omega, \partial]] = [\partial, [\bar{\partial}, \Lambda^\omega]]$$

ce qui prouve l'identité □

Nous pouvons maintenant prouver les inégalité de kähler tordues sur le fibré en droite L

Proposition **4.8** (Identité de kähler tordues)**.** *Pour ∇_L la connection de chern sur L et $\partial_L := \nabla_L^{1,0}$*

$$\begin{aligned}
&[\bar{\partial}_L^*, L^\omega] = i\partial_L \quad , \quad [\partial_L^*, L^\omega] = i\bar{\partial}_L \\
&[\Lambda^\omega, \bar{\partial}_L] = -i\partial_L^* \quad , \quad [\Lambda^\omega, \partial_L] = i\bar{\partial}_L^*
\end{aligned} \tag{2}$$

Démonstration. Dans une base normale en x_0, σ, les differents opérateurs differentiels s'expriment localement

$$\nabla_L(\alpha\otimes\sigma) = d\alpha\otimes\sigma + \mathcal{O}(|z|) \qquad \nabla_L^*(\alpha\otimes\sigma) = d^*\alpha\otimes\sigma + \mathcal{O}(|z|)$$

etc... La preuve est donc réduite à la preuve précedente. □

Il est possible de se demander en quoi le nom "Identité de kähler tordues" est justifié quand aucun terme de torsion n'apparait. En réalité la torsion apparait quand on s'intéresse aux différents laplacien sur le fibré en droite et nous rapproche de notre théorème principal de la sous-section.

Soit $\Delta_L^{\bar\partial} = [\bar\partial_L, \bar\partial_L^*]$, $\Delta_L^{\partial} = [\partial_L, \partial_L^*]$, $\nabla_L = [\nabla_L, \nabla_L^*]$

Corollaire **4.9** (Formule de Bochner-Koidara)**.**

$$\Delta_L^{\bar\partial} = \Delta_L^{\partial} + [iF_\nabla^L, \Lambda^\omega]$$

Démonstration.

$$\Delta_L^{\bar\partial} = -i[\bar\partial_L, [\Lambda^\omega, \partial_L]]$$

or

$$[\bar\partial_L, \partial_L] = \bar\partial_L\partial_L + \partial_L\bar\partial_L = (\bar\partial_L + \ \partial_L)(\bar\partial_L + \partial_L) = F_\nabla^L$$

et l'identité de Jacobi nous donne que

$$-[\bar\partial_L, [\Lambda^\omega, \partial_L]] + [\Lambda^\omega, [\partial_L, \bar\partial_L]] + [\partial_L, [\bar\partial_L, \Lambda^\omega]] = -\Delta_L^{\bar\partial} + \Delta_L^{\partial} + [iF_\nabla^L, \Lambda^\omega] = 0$$

□

Dans notre cas d'intérêt, $F_\nabla^{L^k} = k\omega$ or localement dans un système de coordonnées normales où $\omega(0) = \sum_i idz_i \wedge d\bar z_i$ on a

$$L = \sum_i L_i \ , \quad L_i = idz_i \wedge d\bar z_i$$

et donc

$$\Lambda^\omega = \sum_i L_i^* \ , \quad L_i^* = i \ \iota_{\frac{\partial}{\partial z_i}} \iota_{\frac{\partial}{\partial \bar z_i}}$$

d'où

$$[\Lambda^\omega, L] = in$$

Comme $\Delta_L = \Delta_L^{\bar\partial} + \Delta_L^{\partial}$, on obtient la formule du début de paragraphe,

$$\Delta_k = \Delta_k^{\bar\partial} + nk$$

et sur les sections de L la formule se lit

$$\nabla_k^*\nabla_k = \bar\partial_k^*\bar\partial_k + nk$$

Nous nous intéressons au niveau fondamental de cet hamiltonien, c'est à dire le niveau d'énergie nk. Il est exactement composé des sections de L telles que

$$\bar\partial_k^*\bar\partial_k s = 0 \text{i.e.} ||\bar\partial_k s||^2$$

donc

$$\ker(\tilde H_k - nk) = H^0(M, L^k)$$

Remarque **7.** *L'intuition physique nous permet d'estimer la dimension de $H^0(M, L^k)$. C'est un espace de particules fermioniques donc la dimension de l'espace est égale au nombre maximum de fermions qui peuvent vivre simultanément où encore*

$$\#\mathit{fermions} = \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\mathit{volume\ d'un\ fermion}}$$

or le principe d'Heisenberg nous permet d'estimer l'écart type spatial de tels fermion avec

$$\Delta x \Delta p \simeq \hbar = 1$$

Si on estime l'impulsion d'un fermion en prenant en compte le champs magnétique (= nk en flux total donc $\simeq k$ dans une direction) et en négligeant l'impulsion cinétique (car les particules sont non excités) on obtient

$$\Delta p = \Delta p_{cin} + p_{magn\acute{e}tique} \simeq k$$

et alors

$$\Delta x \simeq \frac{1}{k}$$

ce qui donne un écart type en $k^{-1/2}$ *et en modélisant les fonctions d'onde comme des gaussiennes*

$$\mathrm{Vol}\{fermion\} \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{k}}^{2n}$$

et donnant comme équivalent

$$\dim H^0(M, L^k) \simeq (\frac{k}{2\pi})^n \,\mathrm{Vol}(M)$$

Nous verrons par la suite une manière rigoureuse de montrer ce résultat

Remarque **8.** *Ce formalisme nous permettra d'aborder une analyse semi-classique où ce n'est pas la constante de planck qui tend vers* 0 *mais le champs magnétique qui s'intensifie. Contrairement au approches orthodoxes de la quantification de Berezin-Toeplitz, l'espace de Hilbert n'est pas un espace quantifiant l'espace des phases classique* M *mais l'espace quantique de particules sans spin de basses energies dont l'espace des positions est* M.